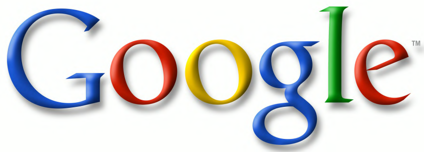
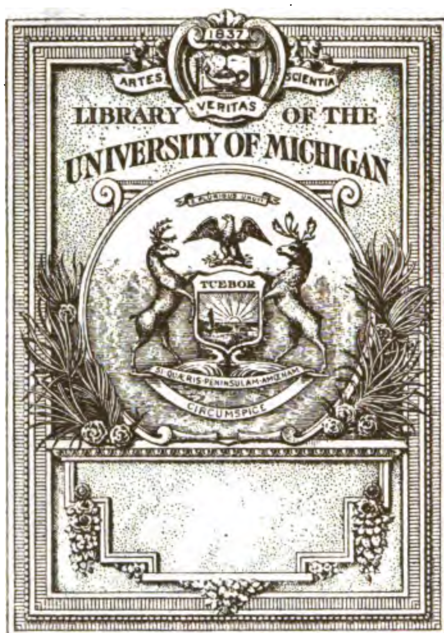
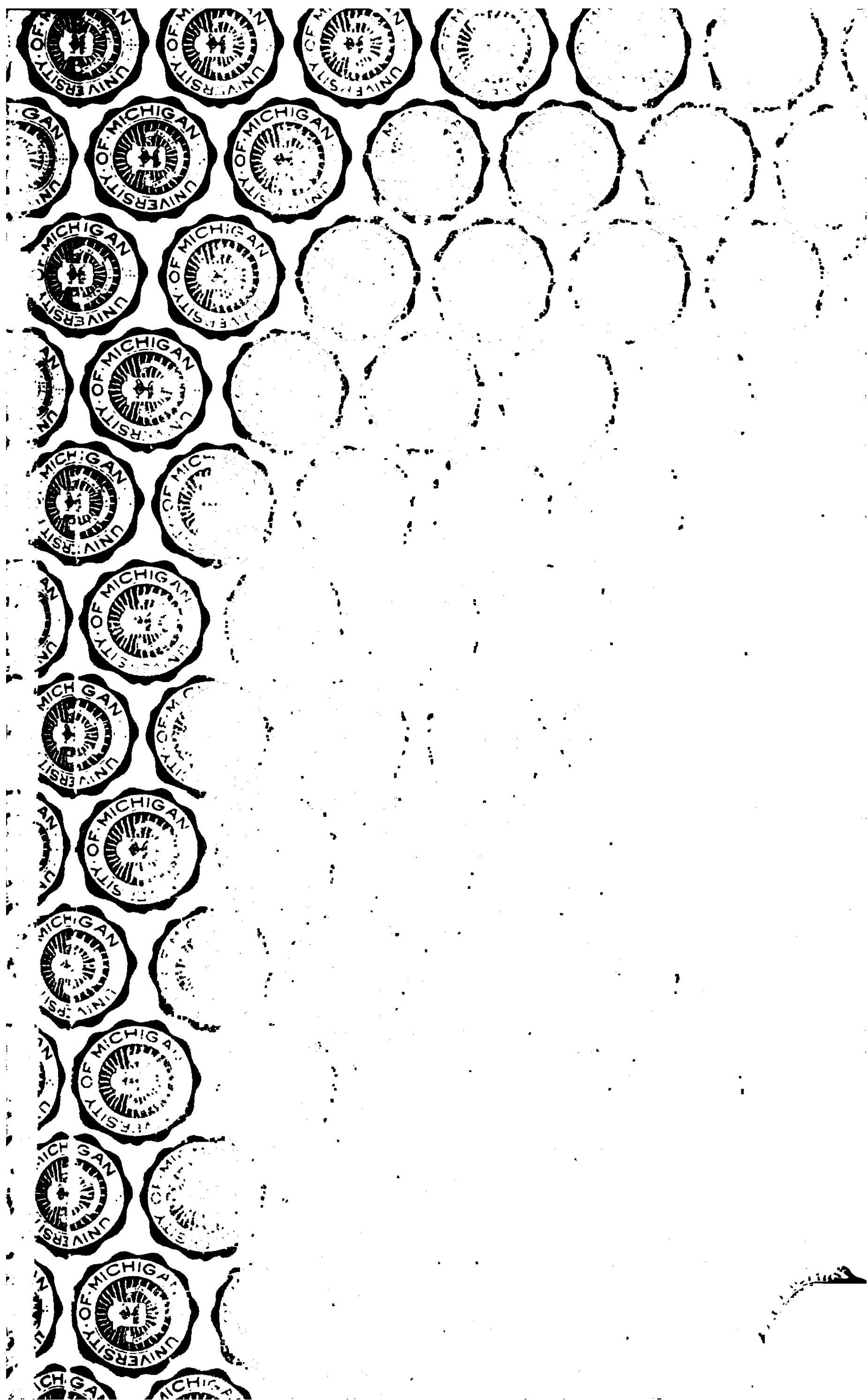



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE


UNIVERSITY OF MICHIGAN

et l'équilibre

PRINCIPES SUR LE MOUVEMENT ET L'EQUILIBRE,

POUR SERVIR D'INTRODUCTION AUX MECHANIQUES ET A LA PHYSIQUE,

Par M. TRABAUD, Maître ès Arts;

Revûs, abregés & augmentés.

Volume in-octavo *avec Figures.*

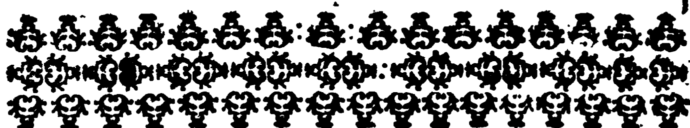
Le prix est de 50 sols en feuilles.



A PARIS,
Chez JEAN DESAINT & CHARLES SAILLANT Libraires, rue de S. Jean-de-Beauvais, vis-à-vis le Collége.

M. DCC. XLIII.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
1-31-1923



PRÉFACE.

LES ouvrages du Créateur ont excité dans tous les tems l'admiration & la curiosité des Philosophes ; mais le desir empressé qu'ils ont eu de sçavoir, n'a pas toujours été satisfait. La maniere dont on étudie la nature décide du succès, car elle ne se montre pas accessible par tous les endroits. La structure de l'univers est une espece d'énigme : les génies du premier ordre s'exercent depuis près de six mille ans pour la deviner, & l'on peut dire que leurs méditations n'ont pas été également récompensées.

Différentes manieres de considérer la Physique, son renouvellement dans le siécle dernier.

La Physique a été languissante pendant une longue suite de siécles. Les anciens Philosophes l'ont, pour ainsi dire, tenue étouffée dans sa naissance, faute d'avoir assez réfléchi sur l'objet de leurs recherches. Pour développer le méchanisme de cet univers sensible, il ne suffit pas, à leur exemple, de le faire par des raisonnemens uniquement fondés sur des idées vagues, abstraites, & de pure métaphysique. Expliquer la nature, c'est observer ce qui s'y passe, & avec le secours des observations, prévoir ce qui peut y arriver, & en faire des récits circonstanciés ; si dans notre travail nous nous contentons d'amasser des faits, la provision que nous en faisons, la connoissance que nous en acquerons par l'usage légitime de nos sens, c'est ce que l'on appelle la *Physique expérimentale* : mais si dans le cours de nos méditations nous avons soin de lier ces mêmes faits ; si nous parvenons à voir avec clarté leur mutuelle dépendance ; si par une analyse exacte nous pouvons nous en représenter plusieurs sous une même idée, & les appercevoir tous comme dans un seul point de vue ; si enfin nous pouvons déterminer dans quelle proportion ils influent les uns

Physique expérimentale.

Physique raisonnée & scientifique.

dans les autres ; cet enchaînement clairement connu de causes & d'effets, est ce qui constitue *la Physique raisonnée, la Physique scientifique*. C'est cette Physique qui a été négligée dans l'antiquité, & qui n'a paru dans le grand jour que depuis près d'un siécle.

Des esprits attentifs & d'un discernement exquis, s'apperçurent que tout ce qui appartient à cet univers sensible, fabriqué par la main du Créateur, est matiere & mouvement. La matiere a été revêtue de qualités qui la rendent capable de divers effets : & le mouvement est comme l'agent universel qui dirigé par l'intelligence souveraine, fait exécuter à la matiere les fonctions auxquelles elle est destinée. La Physique considere donc non-seulement la matiere & la structure de ses parties, mais encore le mouvement ; sans le mouvement la matiere n'est qu'une masse informe ; c'est du mouvement qu'elle reçoit ses beautés & cette variété inépuisable qui ravit d'admiration tous ceux qui prennent goût à la méditer.

Les Philosophes du dernier siecle raisonnant tous sur le même principe, que tout ce qui appartient à ce monde visible s'opere avec la matiere & le mouvement, se partagerent en deux classes. Les uns se confiant en la supériorité qu'ils se sentoient, firent essai de leurs forces : ils voulurent voir de quoi la matiere mise en mouvement étoit capable, & jusqu'où le principe qu'ils prenoient pour guide pouvoit les conduire. Dans cette pensée M. Descartes dressa son systême général du monde, & le proposa aux Physiciens non comme une copie fidéle du vrai monde, mais comme une simple hypothèse. Jusqu'à M. Descartes le langage inintelligible des Peripatéticiens avoit prévalu dans les Ecoles ; il crut donc que le meilleur moyen de dissiper les anciens préjugés étoit de faire un systême dans lequel on vît clairement qu'en Physique comme dans les autres sciences peu de principes lorsqu'ils sont évidens, peuvent faire découvrir un grand nombre de vérités du moins hypothétiques. Il est vrai qu'il entre dans un certain détail, mais ce n'est pas tant pour expliquer de point en point ce qu'il y a de plus caché dans la nature, que pour tracer un modele de

la maniere dont il faut s'y prendre pour raisonner dans les matieres de Physique. Le regret qu'il a témoigné de n'être pas en état de faire les expériences qu'il auroit souhaité, prouve assez, que bien loin de croire que son monde fût une représentation au naturel du vrai monde, il étoit au contraire persuadé que dans les conséquences & dans les explications particulieres des phenomenes il pouvoit s'être trompé.

La Physique cultivée par M. Descartes & par ceux qui l'ont suivi ou qui ont travaillé sur le même plan, est appellée *Physique systématique*. C'est un corps de principes par le moyen desquels on peut conjecturer avec vraisemblance les premieres causes : plus les causes sont intimement liées avec les effets qu'on leur attribue & qu'on en fait dépendre, plus on est assuré d'approcher de la vérité. Il est difficile qu'un systême général de Physique soit porté à la perfection qu'il peut avoir, & qu'il se soutienne également bien dans toutes ses parties, si l'examen d'un grand nombres de phénomenes, & même de la nature entiere, n'a produit auparavant plusieurs systêmes particuliers qui par leur accord concourent à former le systême général. M. Descartes en réduisant toute la Physique à des principes méchaniques, peut avoir donné la bonne méthode de raisonner en cette science ; mais oseroit-on fixer le tems auquel on doit se promettre d'en recueillir les fruits. Physique systématique.

D'autres Philosophes d'un grand nom prirent une route un peu différente ; sentant bien qu'il est d'une difficulté extrême de pénétrer dans la vraie structure de l'univers, & de parvenir jusqu'au premieres causes, ils crurent que les progrès de la Physique seroient plus prompts s'ils n'embrassoient d'abord qu'une partie de son objet : ils bornerent donc pour lors leurs recherches au seul mouvement ; ce sujet est susceptible d'évidence ; & pour établir la certitude des conséquences qu'on en peut déduire, il n'est pas nécessaire d'entrer dans les qualités les plus intimes des corps, ni de connoître leurs vraies causes, les causes qui concourent à leur formation ou qui les meuvent. Les mou- Physique Mathématique.

vemens qui dans la nature se perpétuent de siécle en siécle, sont reglés par des loix certaines & constantes : or ce sont ces loix là même qu'il importe & qu'il suffit de bien connoître ; lorsqu'on vient à bout de découvrir la loi suivant laquelle un mouvement s'exécute, on peut dire que tout est fait : les circonstances qui accompagnent ce mouvement & les effets qui en naissent se présentent avec facilité, il n'y a plus qu'à raisonner conformément à la loi établie : cette méthode d'analyser les mouvemens & d'en écarter toutes les circonstances qui ne sont point nécessaires à la recherche qu'il en faut faire, fut la source d'un grand nombre de découvertes qui enrichirent pour lors la Physique, & les progrès qu'ont fait dans la suite ceux qui ont tenu la même route, sont encore plus surprenans & plus rapides. La partie de la Physique dont l'objet est d'examiner & de déterminer les loix qui reglent les mouvemens qui subsistent dans cet univers, a reçu le nom de *Physique Mathématique*, parce qu'elle est toute fondée sur les rapports qui font l'objet des Mathématiques.

Certitude de la Physique Mathématique.

On ne s'arrête pas à prouver au long la certitude & l'évidence de cette partie de la Physique, chacun peut s'en convaincre par ses propres réflexions. Dieu en créant l'univers matériel, a assujetti la formation & la naissance des corps à un ordre, il a voulu qu'ils s'entrecommuniquassent leurs mouvemens, & que tout se fît par la correspondance mutuelle des parties : souverainement libre dans ses ouvrages & dans le choix des moyens, il auroit pû donner à chaque chose toute sa perfection en un moment, & lui faire remplir par lui-même les fonctions auxquelles elle est propre ; mais il a eu dessein de faire passer ses productions par divers degrés, & de les faire émaner les unes des autres, afin qu'il y eût une succession de causes & d'effets. Par cette disposition permanente, Dieu conserve son ouvrage & l'entretient dans l'état où il l'a mis, sans qu'on s'apperçoive qu'il change, quoique ce soit dans le plan général qu'il a choisi. Les mêmes causes sont toujours suivies des mêmes effets, & leur retour annonce les mêmes évenemens.

Certitude dans son objet.

Certitude

Lors donc que des observations exactes & des expé-

riences faites & réitérées avec soin nous manifestent quelque partie de ce bel ordre, non-seulement nous sommes assurés de la vérité des choses que nous voyons & dont nous sommes témoins, mais nous pouvons dire, sans danger de nous tromper, que dans la suite des siécles les mêmes expériences auront encore les mêmes succès. L'illusion des sens n'est point à craindre ici; le scrupule mal fondé des Pyrrhoniens peut bien faire naître un doute méthodique & de simple spéculation, mais il ne sauroit être sérieux. dans ses principes.

Certitude dans ses conséquences.

Comme l'expérience ne dévoile pas tout, la Physique quoique certaine, seroit très-bornée si elle ne s'étendoit pas plus loin que l'observation; les vérités d'expérience ne sont que des vérités détachées, sans suite, sans dépendance; mais l'esprit venant à méditer sur les expériences, va au-delà de l'expérience même; il compare les faits, il combine les circonstances, il considere la part que chacune peut avoir dans les phénomenes qu'il examine, & enfin par un travail assidu, il arrive à des conclusions qui ont la même certitude que les principes dont elles découlent: de cette sorte il rapproche des vérités qui en elles-mêmes paroissent très-éloignées, il les dispose; & par l'arrangement qu'il leur donne, il forme une chaîne qui lui représente d'un bout à l'autre la partie de l'univers qui fait l'objet de ses méditations.

Méthode que l'on suit dans la Physique Mathématique.

Il n'est pas nécessaire pour cela qu'il approfondisse les premieres causes, ni qu'il discute les premiers principes des corps; la méthode de traiter la Physique qu'on propose ici, en dispense, car il s'agit seulement d'exprimer les effets naturels par certains rapports: cette méthode est la plus aisée & la plus à la portée de l'esprit humain; rien ne lui est plus familier que les rapports, & il ne conçoit jamais mieux une chose que lorsqu'on la lui présente à la lumiere de quelque rapport. Dans la nature tout est supputé, tout s'y opere avec poids & mesure; c'est donc se conformer aux vûes de la Nature ou de son Auteur, & la suivre pied à pied, que de déveloper ses opérations par une suite de rapports. Le Mouvement & ses effets, de même que les

nombres & l'étendue sont susceptibles de *plus* & de *moins* ; ce sont des quantités qui peuvent être augmentées ou diminuées : ainsi comparer deux mouvemens, dont l'un soit, par exemple, deux fois aussi grand que l'autre, c'est une même chose que de comparer deux lignes ou deux nombres, dont l'un contient l'autre deux fois ; car les rapports égaux donnent le même résultat, quelles que soient les especes de quantité que l'on compare. En fait de rapports on peut donc raisonner des mouvemens comme des nombres & des dimensions de l'étendue ; c'est-là aussi la méthode que l'on suit dans la Physique-Mathématique.

Utilité de la Physique-Mathématique.

Il seroit superflu de s'étendre sur les avantages de la Physique-Mathématique, ou de la Science du Mouvement : de quelque côté qu'on jette les yeux on voit des traces de son utilité ; la plûpart des Sciences & des Arts la supposent, comme l'Astronomie, la Navigation ; ou en font partie, comme la Méchanique ; & en particulier la partie de la Physique qui considere la structure des corps, leurs qualités & leur formation, ne sçauroit se passer de la Science du Mouvement, puisque c'est de cette Science qu'il faut apprendre de quelle maniere s'unissent les principes qui entrent dans leur composition.

On est persuadé aujourd'hui que les Sciences qui procedent par voie de démonstration, comme la Géométrie, la Science des Nombres, &c. sont les plus propres pour former le jugement ; la certitude des vérités, l'évidence des preuves, la simplicité de la méthode que l'on y suit, peuvent autoriser cette préference : or un Traité du Mouvement tel qu'on le conçoit ici, n'étant qu'une Géométrie appliquée aux effets naturels, peut en instruisant l'esprit des merveilles de l'Univers, lui fournir des modeles de raisonnement aussi parfaits que ceux qu'il trouve dans la Géometrie pure, & plus intéressans par l'agrément de l'objet.

Depuis que la bonne Physique a commencé à s'introduire dans les Ecoles, depuis que les Maîtres se sont appliqués à faire choix des matieres pour ne proposer à leurs Disciples que des choses qui soient certaines, utiles & propres à piquer la curiosité, on s'apperçoit du progrès que

sont les jeunes gens qui ont du goût pour les choses solides ; & qui est-ce qui ne goûte point la vérité lorsqu'elle est mise dans un bel ordre, & qu'elle est présentée avec clarté ? On voit, dis-je, que ces jeunes amateurs de la Philosophie sont attentifs & animés d'une noble émulation ; le tems est bien employé, & ils ont la satisfaction à la fin de leur cours, de s'être instruits d'un grand nombre de vérités qui sont autant de preuves de la majesté & de la toute-puissance de celui qui les a créées : elles leur font sentir que l'homme qui est si grand en lui-même, puisqu'il est capable de si hautes connoissances, doit néanmoins vivre dans une dépendance entiere à l'égard de cet Etre suprême ; & lorsqu'après avoir fait des réflexions sérieuses sur ce qui se passe dans cet univers, ils voient que la plus petite force qui se joint de nouveau à un mouvement déja éxistant, par exemple, celui de la Lune, doit à la longue l'altérer & y produire des changemens considérables, il ne leur est pas difficile de se convaincre & de reconnoître que rien n'arrive par hazard, & que tout est conduit par une intelligence souveraine ; car comment pourroit-il se faire qu'entre tant de mouvemens divers, il ne s'en joignît jamais aucun à celui de la Lune pour la détourner de sa route, pour en accélérer ou en retarder les révolutions, sans aucune regle & suivant des mesures incertaines, ce qui troubleroit sans doute la proportion & l'ordre dans lequel elle les fait.

La Société trouve aussi son utilité dans cette étude : les jeunes gens munis des principes qu'ils ont amassés sont en état déxaminer les Ouvrages de l'Art, de s'en instruire & d'en juger sainement ; & ceux qui se destinent à les éxécuter & à en faire une profession, ont une plus grande facilité à réussir que ceux qui ne sont guidés dans leurs opérations que par la simple pratique.

C'est pour entretenir ces heureux commencemens, les fortifier, s'il est possible, ou même pour contribuer en quelque chose à les former, que je composai un Ouvrage plus étendu, dont celui-ci est l'abregé. Mon premier dessein étoit d'abord de ne travailler que pour les Ecoliers

But de cet Ouvrage.

qui font leur Physique dans les Colléges, & de me borner aux seules matieres de Méchanique que Messieurs les Professeurs expliquent de vive voix, ou dans les écrits qu'ils dictent; mais je fis réflexion que la brieveté du tems oblige les Maîtres de resserrer les matieres, d'en traiter plusieurs sommairement, & de laisser à leurs Disciples le soin de les étendre par leurs méditations particulieres, où en y joignant la lecture de quelque Livre: je crus donc qu'il étoit à propos de donner premierement à cet Ecrit une étendue proportionnée aux divers besoins, & telle à peu-près que des élémens doivent avoir; & que si les Maîtres qui sont préposés pour l'instruction de la jeunesse, jugeoient ensuite qu'un Abregé dût être utile, il y auroit plus de facilité à l'éxécuter, parce que je serois à portée de profiter des observations qu'ils auroient eu le tems de faire sur l'ouvrage entier. Plusieurs me firent dès-lors l'honneur de me dire que les Ecoliers de Physique pourroient se servir utilement d'un tel Abregé. Dans cette pensée je me mis en état d'y travailler, & je puis dire que leur zele pour le progrès des Sciences, & le soin qu'ils prennent de les étendre, acheva de me déterminer à le faire. En travaillant de nouveau l'Ouvrage, je l'ai comme refondu, j'ai lié les sujets, & je les ai fait suivre; en m'attachant à être court, j'ai eu soin que la clarté ne perdît rien de ses droits; la longueur des preuves y est souvent nuisible; pour être plus concis, j'en ai accourci le discours dans les endroits qui m'ont paru le demander; & lorsque je n'ai pu le faire sans devenir obscur, je les ai divisées en plus d'un membre, dans le dessein d'être plus méthodique, & de ménager à l'esprit certains repos qui tous ensemble le conduisissent néanmoins au but principal. Ce seroit un défaut inexcusable & qui choqueroit directement le projet d'un abregé, d'embrasser un champ trop vaste; celui que je présente devant être lû en peu de tems, m'impose la nécessité de me borner aux matieres que les Professeurs de Physique traitent ordinairement dans leurs cayers; aux matieres, dis-je, qui tiennent plus intimement aux premiers principes, & qui peuvent être expliquées commodément dans une classe: c'est

dans cette vue & pour ne point trop multiplier les objets, que j'ai renvoyé à la fin de cet écrit plusieurs points, qui quoique beaux & dignes d'être sçus, sont moins ordinaires; afin que ceux qui n'auroient pas le tems de les lire, pussent les passer sans inconvénient; (j'en excepte le neuviéme renvoi qu'il seroit à propos de joindre avec l'article 65 du I. Livre, & avec la II. Démonstration de l'art. 17 du IV, pour mieux juger des inconvéniens dont il sauve ces deux preuves; à l'égard de la seconde méthode de déterminer les limites de l'air sensible art. 88 du V Livre, je ne l'ai point placée dans les renvois pour montrer en un même endroit jusqu'à quel point les trois méthodes qui y sont décrites s'accordent dans leurs résultats; au reste comme elle est en italique, il est aisé de voir qu'elle n'est point liée ni avec ce qui précede, ni avec ce qui suit;) si enfin nonobstant ces raisons qui m'ont guidé, quelqu'un trouvoit encore que je ne me suis point assez étendu, je le prie de considerer que j'ai dû écrire pour le grand nombre, & que dans les conjonctures présentes, il est plus aisé d'augmenter que de retrancher; qu'ainsi sans s'astreindre à lire de suite le premier écrit dont celui-ci est l'abregé, il peut à l'ouverture du livre choisir les endroits qui le toucheront davantage, & amplifier l'objet de sa méditation.

Je ne dis rien de l'utilité que peuvent retirer de cet Abregé ceux pour qui il est fait, c'est aux Maîtres à décider de ce point. Qu'il me soit néanmoins permis de rapporter à ce sujet les réflexions de deux Célebres Professeurs de l'Université; mon dessein n'est point de les donner pour regle de ce qu'il y a à faire, ni de montrer la route qu'il faut suivre; je ne m'arroge point un tel droit, & je n'oublie point ce que je viens de dire, c'est uniquement pour mettre sous les yeux les inconvéniens que l'expérience leur a fait découvrir, qu'il y a à dicter des cayers d'une certaine étendue sur les différentes parties des Mathématiques. Voici comment s'exprime M. Rivard, Professeur de Philosophie en l'Université de Paris, au commencement de ses Elémens de Géometrie: *Témoin des peines & des dégoûts que causent aux jeunes-gens qui étudient la Philosophie, des cayers écrits*

peu correctement sur des matieres embarrassantes ... où un chifre, une lettre, un trait de plume mis pour un autre, déroutent un commençant dans les choses les plus faciles, le désolent, & l'arrêtent quelquefois pendant long-tems, sans pouvoir passer outre.

M. de la Caille, Professeur de Mathématique au Collége Mazarin, de l'Académie Royale des Sciences, dans l'Avertissement qui est à la tête des Leçons Elementaires de Méchanique, reconnoît *l'impossibilité où se trouvent les Ecoliers, & sur-tout les commençans, d'écrire éxactement des choses qu'ils ne comprennent pas, d'arranger comme il faut les nombres & les opérations d'Algebre, de ne pas confondre les sons équivoques de plusieurs lettres qu'on prononce seules en dictant, comme sont* b, p, d, t, m, n. *Il ne faut qu'une transposition, qu'une lettre à la place d'une autre, pour rendre inintelligible toute une démonstration.*

Je souhaite qu'un Ouvrage dans lequel jai été engagé il y a plusieurs années par un événement peu attendu, puisse leur être de quelque service. En l'abrégant j'ai cru devoir faire quelques additions, c'est pour cette raison que le Titre porte qu'il est Abregé & Augmenté.

Un Traité du Mouvement a une si grande rorrespondance avec l'Astronomie, & l'Astronomie en a une si grande avec un Traité de la *Sphere*, que ces deux traités ensemble peuvent être regardés comme une introduction à cette science. Dans le Traité que je présentai il y a deux ans, j'ai établi plusieurs propositions qui y ont un rapport immédiat: ceux qui les liront & qui ont du goût pour l'Astronomie regretteront peut-être de n'avoir pas les secours nécessaires pour se disposer à apprendre les matieres plus à fond: les mêmes personnes seront sans doute bien aises que je leur indique deux ouvrages où ils trouveront de quoi satisfaire leurs desirs; ils tendent l'un & l'autre au même but, quoique par des voies différentes. Le premier est un Traité de la Sphere & du Calendrier par M. *Rivard*, Professeur de Philosophie au Collége de Beauvais. Il a aussi donné le même ouvrage abregé à l'usage de ceux qui ne sçavent pas de Géométrie. L'auteur y soutient parfaitement la réputa-

tion d'être très-clair & très-méthodique, c'eſt le témoignage que les Journaux rendent de ſon ouvrage : il contient non-ſeulement les matiéres & les queſtions qui ſont expliquées dans les Traités ordinaires de la Sphere, mais encore pluſieurs autres qui ſont non moins curieuſes qu'intéreſſantes ; en un mot l'on peut dire que cet écrit ne cede en rien aux Elémens de Géométrie du même Auteur, leſquels ont mérité l'eſtime & l'approbation de ceux qui ſçavent de quel prix eſt la clarté dans un ouvrage de ce genre : ce ſont les Elémens de Géom. que j'ai cités dans les tables qui ſont à la fin de cet écrit. Le Traité de la Sphere & des Elémens de Géometrie ſe vendent *à Paris chez Jean Deſaint & Charles Saillant Libraires, rue Saint Jean-de-Beauvais.*

L'autre ouvrage que j'ai en vûe eſt un nouveau Traité de *Trigonométrie rectiligne & ſphérique accompagné de Tables des Sinus, Tangentes & Secantes en parties réelles ; des Logarithmes des nombres naturels depuis l'unité juſqu'à vingt mille ; & des Logarithmes des Sinus, Tangentes & Secantes par M. Deparcieux,* Maître de Mathématiques, à Paris chez *Hyppolite-Louis Guerin & Jacques Guerin Libraires, rue Saint Jacques à Saint Thomas d'Aquin.* Cet ouvrage eſt dedié à l'Académie Royale des Sciences ; le jugement qu'elle en porte dans l'approbation qu'elle en a donnée, & que l'on lit à la tête du même ouvrage, eſt qu'il eſt *méthodique & utile.* On ſçait de quelle importance il eſt pour les calculs, & ſur-tout pour les calculs Aſtronomiques d'avoir des Tables correctes ; on peut compter ſur la bonté & l'éxactitude de celles que l'Auteur a fait imprimer ſous ſes yeux. Le même ouvrage contient encore un Traité de Gnomonique. M. Rivard en a fait auſſi imprimer un. Deux ouvrages ſur le même ſujet ne peuvent qu'éclaircir davantage les matieres lorſqu'ils ſont faits par des mains habiles. Le même Auteur a pareillement donné des Tables des Sinus, Tangentes, Sécantes & de leurs Logarithmes, avec la conſtruction de ces Tables & les Problêmes de la Trigonométrie rectiligne & ſphérique.

Il ſe propoſe deux objets dans la diſpoſition qu'il leur donne, 1°. de faire trouver les Logarithmes des Sinus, des

Tangentes & des Sécantes dans la même ouverture du livre. Ce qu'il exécute par des moyens dont on ne peut mieux sentir l'avantage qu'en ouvrant le livre. 2°. *De présenter devant les yeux plusieurs indices pour s'assurer de leur exactitude* : Le défi que le Libraire fait dans l'Avertissement qu'il donne, en est encore une preuve non équivoque.

Voici quelques-unes des principales matieres qui sont traitées dans l'Ouvrage entier dont je n'ai pas cru devoir parler dans cet Abregé. 1°. La question des forces vives & des forces mortes. 2°. Les mouvemens relatifs & apparens suivant des directions qui concourent. 3°. La force centrale dans l'ellipse. 4°. Le pendule à cyloïde. 5°. La méthode de déterminer le centre de gravité dans les figures les plus ordinaires. 6°. Plusieurs circonstances du mouvement des corps jettés & du choc des corps à ressort & sans ressort, & du mouvement de réfraction. Dans la Statique la méthode de prouver le levier par la propriété du centre commun de gravité, les momens, les appuis dans le Tour ou Treuil, la construction du peson, &c. Dans l'hydrostatique, l'examen de la fluidité, la maniere de déterminer les pressions des parois & des fonds non horizontaux de différens vaisseaux, sur les tuyaux capillaires, &c. Dans l'hydraulique, la dépense des eaux courantes & lorsqu'elles sortent par des ouvertures verticales & rectangulaires ; le choc des surfaces en mouvement, &c.

APPROBATION.

J'Ai lu par l'ordre de Monseigneur le Chancelier l'*Abrégé des Principes sur le Mouvement & l'Equilibre pour servir d'introduction aux Méchaniques & à la Physique.* J'ai trouvé que cet Abregé n'étoit point inférieur à l'Ouvrage entier qui a mérité les éloges du Public. Fait à Paris ce 10 Juillet 1743.

MONTCARVILLE.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos ames & féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils,

& autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien-amé le Sieur TRABAUD, Nous a fait remontrer qu'il souhaiteroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage qui a pour titre : *Principes sur le Mouvement & l'Equilibre pour servir d'introduction aux Méchaniques & à la Physique par ledit Sieur Trabaud*, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce nécessaires, offrant pour cet effet de le faire imprimer en bon papier & beaux caracteres suivant la feuille imprimée & attachée pour modele sous le contrescel des présentes. A ces causes, voulant favorablement traiter ledit Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces présentes, de faire imprimer ledit Ouvrage ci-dessus spécifié, en un ou plusieurs volumes, conjointement ou séparément, & autant de fois que bon lui semblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de neuf années consécutives, à compter du jour de la date desdites Présentes : Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere, dans aucun lieu de notre obéissance ; comme aussi à tous Libraires, Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre ledit Ouvrage ci-dessus exposé en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre ou autrement, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel Dieu de Paris, l'autre tiers audit sieur Exposant, & de tous dépens, dommages & intérêts : A la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression de cet Ouvrage sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du dix Avril 1725 ; & qu'avant que de l'exposer en vente, le manuscrit ou imprimé qui aura servi de copie à l'impression dudit Ouvrage sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Présentes : du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir ledit Exposant ou ses ayans-causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement : Voulons que la copie desdites Présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Sécretaires, foi soit ajoûtée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & lettres à ce contraires : Car tel est notre plaisir. Donné à Compiegne le douziéme jour d'Août l'an de grace mil sept cens quarante, & de notre regne le vingt-cinquiéme. Par le Roi en son Conseil.

Signé, SAINSON.

Registré sur le Registre X. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 401, fol. 389, *conformément au Reglement de 1723, qui fait défenses Art. IV*. à toutes personnes de quelque qualité qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter &

faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement ; & à la charge de fournir à ladite Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, les huit Exemplaires prescrits par l'Article 108 du même Réglement. *A Paris le 15 Septembre 1740.*

SAUGRAIN, Syndic.

Ce signe + signifie *plus*, celui-ci − signifie *moins*, & = est le signe d'*égalité* : ainsi $5+4=9$; c'est-à-dire, si à 5 on ajoute 4, la somme est égale à 9 ; & $9-2=7$, c'est-à-dire, si de 9 on retranche 2, le reste est égal à 7. Si on trouve $5>3$, cela signifie que 5 est plus grand que 3 & $3<5$, que 3 est moindre que 5, & $3\times4=12$ que 3 multiplié par 4 donne un produit égal à 12 & $\sqrt{16}$ qu'il faut tirer la racine quarrée de 16 laquelle $=4$.

Fautes à corriger.

Page 7 *lig.* 24, 9000 *lisez* 1000.
p. 106 *lig.* 16, suconde *lis.* seconde.
p. 125 *lig.* 33, l'expersence *lis.* l'expérience.
p. 128 *lig.* 35, puissance *lis.* puissances.
p. 152 *lig.* 3, [*Fig.* 35] *lis. Fig.* 25.
p. 162 *lig.* 18, OB *lis.* CB.
p. 174 *lig.* 14, ABC *lis.* ABCD.
p. 179 *lig.* 13, branche *lis.* tranche.
p. 205 *lig.* 31, le premiere *lis.* la premiere.
p. 206 *lig.* 3, dixxiéme *lis.* dixiéme.
p. 283 *lig.* 4, à son *lis.* & de son.
p. 283 *lig.* 32, 36 *lis.* 48, & *lig.* 36 *lis.* troisiéme.
p. 287 *lig.* 22, les angles *lis.* l'angle.

De l'Imprimerie de PH. NIC. LOTTIN, rue Saint Jacques, à la Vérité. 1743.



ABRÉGÉ DES PRINCIPES SUR LE MOUVEMENT ET L'ÉQUILIBRE.

LIVRE PREMIER.

Du Mouvement en tant qu'il convient à tous les Corps.

1. LE Mouvement a plusieurs faces, & on peut le considérer sous divers rapports ; les Métaphysiciens méditent sur sa nature ; les Physiciens contemplent ses effets, les étudient, & font l'histoire de ses productions ; les Physiciens-Géomètres joignant à la considération des phénomènes l'usage des rapports, déduisent plusieurs conséquences qui donnent une connoissance plus étendue & plus circonstanciée du Mouvement, & fournissent des vues utiles à la perfection & à la pratique des Arts. C'est de cette maniere que nous allons traiter du Mouvement, c'est-à-dire, du Mouvement en tant que nous le concevons comme une grandeur qui est susceptible de divers degrés d'augmentation & de diminution.

A

Dans le Mouvement il y a cinq choses à considérer, la puissance qui meut le corps, le corps même ou sa masse, l'espace ou l'étendue qu'il parcourt, la direction qu'il suit, & le tems ou la durée du Mouvement : or on peut réduire ces cinq choses à trois considérations générales ; sçavoir, la puissance qui meut le corps, la vitesse qu'elle donne & la quantité de Mouvement; car lorsqu'on parle de la vitesse d'un corps, il faut avoir égard au tems & à l'espace parcouru ; la masse entre dans l'idée que l'on a de la quantité de Mouvement ; & une puissance ne peut mouvoir un corps qu'elle ne le pousse suivant une direction.

Ce Livre contient deux Chapitres ; le premier traite de la vitesse & de la quantité de Mouvement ; le second, des Puissances qui meuvent les corps.

CHAPITRE PREMIER.

De la Vitesse & de la quantité de Mouvement.

2. LE Mouvement est le passage d'un corps, d'un lieu en un autre, d'une partie de l'étendue ou de l'espace en une autre partie.

3. Lorsqu'un corps parcourt des espaces égaux ou des longueurs égales en tems égaux ; qu'à chaque seconde, par exemple, il parcourt une toise, son Mouvement est appellé *égal* ou *uniforme* ; mais si en des tems égaux il parcourt des espaces inégaux, son Mouvement est appellé *variable*. Dans ce Chapitre il ne sera question que du Mouvement uniforme. Dans le Mouvement on peut considérer la vitesse, & la quantité ou la mesure de force que le mobile tire de cette vitesse : nous verrons dans la suite que cette force est égale ou proportionnelle à sa quantité de Mouvement ; mais la vitesse est relative à l'espace parcouru, & au tems employé à le parcourir; car pour concevoir la vitesse, il faut joindre ces deux idées, sçavoir, celle du tems, & celle de l'espace parcouru.

De la Vitesse.

4. Pour avoir une idée de la Vitesse, il ne suffit pas de faire attention à l'espace parcouru, il faut encore considérer le tems; qu'un corps parcoure vingt toises, on ne peut point juger s'il est allé vîte ou lentement; mais si on ajoute qu'il a fait ces 20 toises en une minute, sa vitesse est pour lors connue. Supposons, par exemple, qu'un homme a fait deux lieuës en une heure, on juge qu'il est allé très-vîte, parce qu'en comparant le chemin au tems, on trouve que ce voyageur en a fait plus qu'un homme n'a coutume d'en faire dans cet intervalle de tems: d'où l'on voit que pour concevoir la vitesse, il faut comparer l'espace parcouru au tems; c'est pourquoi on définit ordinairement la vitesse *le rapport de l'espace au tems*: c'est-à-dire, que ce rapport fait connoître la vitesse, & est son expression naturelle.

5. Si deux mobiles sont mûs pendant un même tems, cette circonstance du tems ne met aucune différence entre les vitesses; ainsi elle n'est d'aucune considération: on peut donc poser pour principe que *si les tems des mouvemens sont égaux, les vitesses sont entr'elles comme les espaces parcourus*: par exemple, si deux hommes font dans une heure, l'un une lieuë, & l'autre une demi-lieuë, les vitesses sont entr'elles, comme 1 est à $\frac{1}{2}$, ou comme 2 est à 1: *& si les espaces parcourus sont comme les vitesses, ils sont parcourus en même-tems.* Si deux espaces sont l'un double de l'autre, ils sont parcourus en même-tems, pourvu que le mobile qui parcourt le premier ait une vitesse double.

6. Si les tems des mouvemens sont inégaux pour avoir le rapport des vitesses, il faut 1°. comparer les espaces parcourus aux tems; 2°. comparer aussi ces deux rapports entr'eux ou leurs résultats.

PROPOSITION PREMIERE.

7. *Lés vitesses des mobiles* A *&* B *sont entr'elles comme les rapports des espaces aux tems.*

Dém. Les rapports dont il s'agit ici sont géométriques. Cela posé, un rapport géométrique ne differe point d'une division indiquée, ni une division du quotient qui en résulte (1. *Arithm.*) Ainsi le rapport de l'espace au tems est le quotient qui provient de la division de l'espace par le tems : Or je dis que les vitesses des mobiles A, B sont entr'elles comme les quotiens qui proviennent de la division des espaces par les tems : que le corps A parcoure 60 toises en six minutes, & le corps B 120 toises en 4 minutes, il est évident que le corps A parcourt en une minute la sixiéme partie de 60 toises, & que le corps B parcourt dans le même tems d'une minute la quatriéme partie de 120 toises; or si l'on divise les espaces 60 & 120 par les tems 6 & 4, les quotiens 10 & 30 sont aussi, l'un la sixiéme partie de 60, & l'autre la quatriéme partie de 120 (2. *Arith.*), donc ces quotiens expriment les espaces que les corps A & B parcourent l'un & l'autre en une minute, c'est-à-dire, en tems égaux; mais les vitesses sont entr'elles comme les espaces parcourus en tems égaux (5.); donc elles sont entr'elles comme les quotiens, &c.

8. *Remarques.* 1°. Quoique la longueur du tems & la longueur de l'espace soient incomparables l'une à l'autre, si on les considere en elles-mêmes, puisque les parties du tems sont d'une nature différente de celle de l'espace, cela n'empêche point que le tems & l'espace étant conçus sous l'idée générale de quantité ne puissent être comparés l'un à l'autre, & que l'esprit ne découvre entr'eux de vrais rapports.

2°. Lorsqu'on veut déterminer en nombres le rapport des vitesses de deux corps, il faut que les espaces soient exprimés en parties de même nom, par exemple, en toises ou en pieds, &c. il faut observer la même chose à l'égard des tems, sans quoi on ne peut avoir le rapport que l'on cherche ; ainsi supposons que le corps A ait parcouru 300

toises en 17 minutes, & que le corps B ait parcouru une lieuë en trois quarts d'heure, il faut réduire les tems en minutes ou en d'autres parties de l'heure, & les espaces parcourus, en toises ou en d'autres parties de la lieuë.

9. *Corollaires.* 1°. Si les rapports des espaces aux tems, ou les quotiens qui en résultent sont égaux, les vitesses sont aussi égales. Réciproquement, si les vitesses sont égales, les rapports des espaces aux tems sont égaux (7).

10. 2°. *Si les espaces parcourus sont égaux, les vitesses sont entr'elles réciproquement comme les tems.* Car deux rapports qui ont un même antécédent sont entr'eux réciproquement comme les conséquens (3. *Arith.*); or dans les rapports des espaces aux tems, ce sont les espaces qui sont les antécédens, & les tems les conséquens; d'ailleurs les vitesses sont entr'elles comme ces rapports (7); donc &c. Supposons que le corps A ait fait 3000 toises dans une heure, & que le corps B ait fait le même chemin dans deux heures, il est évident que ce corps a fait la moitié de ce chemin, c'est-à-dire, 1500 toises dans une heure; ainsi les vitesses sont entr'elles comme les espaces 3000 & 1500 parcourus en même-tems (5), c'est-à-dire, comme 2 & 1: mais les tems sont entreux comme 1 & 2; d'où l'on voit que le rapport des vitesses 2 & 1 est égal au rapport inverse des tems 1 & 2 (3. *Arith.*); donc &c.

11. On peut abréger les raisonnemens par le moyen de la formule suivante. Soient nommés A, B les corps en mouvement; V la vitesse du corps A, E l'espace qu'il parcourt, T le tems pendant lequel il est mû; v la vitesse du corps B, e l'espace qu'il parcourt, t le tems de ce corps. Cela posé, la proposition donne $V.v::\frac{E}{T}.\frac{e}{t}$, donc (12. *Arith.*) $\frac{Ve}{t}=\frac{vE}{T}$, & après avoir multiplié les deux termes de l'égalité par t & ensuite par T, l'égalité sera $VTe=vtE$. Cette formule ou expression générale représente les circonstances de la vitesse uniforme. Pour les déduire, il suffit, suivant les différentes hypothèses qu'on

peut faire, de disposer les grandeurs qui composent cette égalité de maniere que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens; par-là on exposera les différens rapports qui sont entre les circonstances de la vitesse uniforme; les Corollaires suivans en vont montrer l'usage.

12. 3°. *Les vitesses des mobiles* A, B *sont en raison composée de la raison directe des espaces, & de la raison inverse des tems.* Car puisque VTe=vtE, nous aurons (11 *Arith.*) V. v :: tE. Te. Cela posé, les produits tE, Te sont en raison composée de leurs racines E, e qui sont les espaces & de la raison des racines t, T qui sont les tems (4. *Arith.*); mais il est évident que les espaces E, e sont dans l'ordre direct des vitesses V, v auxquelles ils appartiennent, au lieu que les tems t, T sont dans un ordre inverse des mêmes vitesses, ou les vitesses dans un ordre inverse des tems; donc les vitesses qui sont entr'elles comme les produits tE, Te sont en raison composée de la raison directe des espaces, & de l'inverse des tems. (3. 4. *Arith.*)

13. 4°. *Les espaces sont entr'eux en raison composée des vitesses & des tems*, c'est-à-dire, que E. e :: VT. vt. Ce qui est certain (11. *Arith.*): or les produits VT. vt sont en raison composée de leurs racines V, v qui sont les vitesses, & des racines T, t, qui sont les tems; donc les espaces E, e qui sont entr'eux comme les produits VT. vt sont aussi en raison composée des vitesses & des tems.

14. D'où il suit que si [*fig.* 1.] les lignes AC, BD représentent les vitesses des corps A & B; AG, BH les tems, les espaces E, e sont entr'eux comme les rectangles GC, HD; car ces rectangles sont entr'eux comme les produits des bases V, v par les hauteurs T, t (1. *Géom.*); donc les espaces E, e qui sont entr'eux comme les produits VT, vt sont aussi entr'eux comme les rectangles GC, HD.

15. 5°. *Les tems sont en raison composée de la raison directe des espaces, & de la raison inverse des vitesses;* c'est-à-dire, T. t :: vE. Ve: cette proportion est vraie, puisque (11. *Arith.*) le produit des extrêmes est égal au produit des moyens: or après ce qui vient d'être dit dans le Corollaire 3°, il est visible que la raison de vE à Ve est

composée de la raison directe des espaces E, *e* & de la raison inverse des vitesses V, *v* (3. 4 *Arith.*); donc les tems T, *t* qui sont entr'eux comme les produits *v*E, V*e*, sont en raison composée de la raison directe des espaces E, *e* & de l'inverse des vitesses V, *v*.

16. 6°. Puisque la vitesse d'un mobile est proportionnelle ou égale au rapport de l'espace au tems, en sorte que $V=\frac{E}{T}$, il s'ensuit que si dans cette égalité on connoît deux choses, on pourra trouver la troisiéme. 1°. Si l'espace E & le tems T sont connus, on aura la vitesse V en divisant l'espace E par le tems T: 2°. Si la vitesse V est connue & le tems T, on aura l'espace E en multipliant la vitesse V par le tems T. 3°. Si la vitesse V est connue avec l'espace E, on aura le tems T, en divisant l'espace E par la vitesse V. Supposons que le mobile ait parcouru 9000 toises en neuf heures. 1°. Si on divise 9000 par 9 le quotient 1000 fait connoître que la vitesse du mobile est telle qu'il parcourt 1000 toises dans une heure, ce qui est une vitesse médiocre, si c'est un homme qui marche. 2°. Si on sçait qu'un mobile par sa vitesse peut parcourir en une heure 1000 toises, & que l'on sçache de plus qu'il a été en mouvement 9 heures durant, on aura l'espace parcouru E en multipliant 1000 toises par 9. 3°. Si on sçait que le mobile peut par sa vitesse parcourir 1000 toises dans une heure, & que l'on sçache de plus qu'il a parcouru 9000 toises, on aura le tems T en divisant l'espace parcouru 9000 toises par la vitesse qui est exprimée par 1000 toises, & le quotient 9 sera le tems cherché.

17. On pourroit déduire d'autres Corollaires de la formule $VTe=vtE$ & les exposer en nombres comme on a fait dans les principes; mais les Corollaires 3, 4 & 5 suffisent pour montrer l'usage que l'on peut faire de cette formule, & c'est pour abréger que l'on ne s'arrête point à expliquer ces Corollaires en nombres.

18. Si l'on divise l'espace E & le tems T par un même diviseur, ou l'un & l'autre en un égal nombre de parties,

ces parties étant ſemblables ſeront en même raiſon que les touts E & T (8. *Arith.*), donc le rapport de deux de ces parties exprimera la viteſſe V de même que le rapport $\frac{E}{T}$; & ſi l'on conçoit que l'eſpace E & le tems T ſont diviſés en une infinité de parties, l'infinitiéme partie de l'eſpace & l'infinitiéme partie du tems ſeront encore dans le rapport de l'eſpace E au tems T; donc la viteſſe V qui eſt une grandeur finie, ſera exprimée par le rapport de deux grandeurs infiniment petites; ce qui ne doit point étonner: il eſt vrai que les grandeurs ſont infiniment petites, mais elles ont entr'elles un rapport fini, puiſqu'il eſt égal à celui de E à T lequel eſt fini, la viteſſe V qui eſt exprimée par le rapport de E à T peut donc auſſi être exprimé par le rapport de deux grandeurs infiniment petites.

De la Viteſſe reſpective.

19. La viteſſe dont on vient de parler eſt appellée *propre*, parce qu'elle n'appartient qu'au corps qui eſt en mouvement; mais il y a une autre viteſſe qu'on nomme *reſpective*, c'eſt celle par laquelle deux corps s'approchent ou s'éloignent l'un de l'aute. Cette viteſſe n'eſt ni la viteſſe propre de l'un, ni la viteſſe propre de l'autre, mais elle en réſulte. La viteſſe en général étant le rapport de l'eſpace au tems, la viteſſe reſpective ſera propor. au rapport de l'eſpace que les mobiles parcourent pour s'approcher ou pour s'éloigner, au tems pendant lequel ils parcourent cet eſpace: or ce tems eſt le même que celui pendant lequel chaque corps eſt en mouvement; donc la viteſſe reſpective ſera à la viteſſe propre de l'un des mobiles comme l'eſpace par lequel ils s'approchent ou ils s'éloignent eſt à l'eſpace parcouru par la viteſſe propre. (5)

20. *Lorſque les mobiles* A, B *vont en des ſens oppoſés* [Fig. 2. 3. 4.] *l'eſpace qu'ils parcourent pour s'approcher ou pour s'éloigner, eſt égal à la ſomme des eſpaces* Aa+Bb *qu'ils parcourent par leurs viteſſes propres*: car il eſt viſible qu'après qu'ils ont parcouru par leurs viteſſes propres les eſpa-

ces Aa, Bb, ils se sont approchés ou éloignés l'un de l'autre de l'intervalle Aa+Bb, en supposant qu'ils partent des points A & B, & qu'ils arrivent en même-tems, sçavoir A au point a, & B au point b.

21. *Si les corps vont d'un même côté, l'espace qu'ils parcourent pour s'approcher ou pour s'éloigner, est égal à la différence des espaces* Aa, Bb *qu'ils parcourent en même-tems par leurs vitesses propres* : car si [*Fig.* 5. 6.] les vitesses propres étoient égales, les espaces Aa, Bb qu'ils parcourent en même-tems par ces vitesses, seroient égaux; ainsi les mobiles étant toujours à la même distance l'un de l'autre, la vitesse respective seroit nulle ; mais si l'intervalle AB qui est entre les mobiles lors de leur départ diminue, cela arrive parce que le corps A va plus vîte que le corps B ; de sorte que si de l'espace Aa que le corps A parcourt, on retranche l'espace Bb que le corps B décrit en même-tems, la différence Aa — Bb est l'espace dont les mobiles se sont approchés, comme il paroît par la *Fig.* 5. Si au contraire l'intervalle AB [*Fig.* 6.] augmente, cela arrive parce que le corps B va plus vîte ; c'est pourquoi si de l'espace Bb que le corps B parcourt, on retranche l'espace Aa que le corps A décrit en même-tems, le reste qui est Bb — Aa est l'intervalle dont les mobiles se sont éloignés.

22. Lors donc que deux corps sont mûs sur une même ligne, l'espace qu'ils parcourent pour s'approcher ou pour s'éloigner l'un de l'autre, est égal à la somme des espaces qu'ils parcourent par leurs vitesses propres, s'ils vont en des sens opposés ; & à la différence des mêmes espaces, s'ils vont d'un même côté : or puisque les tems de la vitesse respective & des vitesses propres sont égaux, que de plus les vitesses sont pour lors exprimées par les espaces parcourus, il s'ensuit que la vitesse respective est exprimée par la somme des espaces parcourus, lorsque les mobiles vont en des sens opposés ; & à la différence de ces espaces, lorsqu'ils vont d'un même côté ; & que dans le premier de ces deux cas la vitesse respective est égale à la somme des vitesses propres, & dans le second à leur différence.

23. D'où il suit que si les corps se rencontrent en C, [*Fig.* 2. 5.] la vitesse respective est à l'une des vitesses propres, par exemple, du corps B, comme l'intervalle AB qui est entre les deux corps lors de leur départ, est à l'intervalle BC parcouru par le corps B. Cela est évident après tout ce qui vient d'être dit, car AB est l'espace parcouru par la vitesse respective (20. 21), & BC l'espace parcouru en même-tems par le corps B; donc, &c. (5)

24. Si l'un des corps est en repos, la vitesse respective est égale à la vitesse du corps qui est mû.

PROBLÊME.

25. *Le rapport des vitesses des mobiles* A,B *qui sont mûs sur la ligne* KZ [Fig. 2. 5.] *étant donné ensemble l'intervalle qui les sépare lors de leur départ, trouver sur la ligne* KZ *le point* C *où ils se rencontreront.*

Les mobiles peuvent aller de différens côtés comme dans la [*Fig.* 2.] ou dans le même sens [*Fig.* 5.] une seule solution suffit pour les deux cas. Supposons que les vitesses des mobiles soient entr'elles comme a & b; au lieu de ces deux lettres on peut substituer tels nombres que l'on voudra; la vitesse respective dans l'hypothèse de la *Fig.* 2 est $a+b$,(22) & $a-b$ pour la *Fig.* 5; (22) l'espace parcouru par la vitesse respective sera AB, & l'espace parcouru par le corps B depuis l'instant du départ jusqu'à celui de leur rencontre en C, où l'on suppose qu'ils doivent arriver en même-tems, est BC : cela posé nous aurons la proportion $a \pm b \,.\, b :: AB \,.\, BC$: or les trois premiers termes sçavoir la vitesse respective $a+b$ ou $a-b$, la vitesse propre b du corps B, & l'intervalle AB sont connus, donc l'intervalle BC sera aussi connu par le moyen des trois premiers termes. (10 *Arith.*)

26. EXEMPLE PREMIER. On sçait que dans une montre l'aiguille des minutes va 12 fois plus vîte que l'aiguille des heures, & que si elles partent ensemble du point de midi, l'aiguille des minutes devancera celle des heures, & aura fait un tour lorsque celle des heures arrivera au point

d'une heure ; elles seront pour lors éloignées l'une de l'autre de la douziéme partie du cadran : on demande à quel endroit l'aiguille des minutes atteindra l'aiguille des heures. Si de la vitesse 12 de l'aiguille des minutes on retranche la vitesse 1 de l'aiguille des heures, la différence 11 sera la vitesse respective (22) ; & si l'on nomme a l'intervalle qui est entre le point de midi & celui d'une heure, on aura le point de rencontre par cette proportion $11 . 1 :: a . x$, c'est-à-dire, la vitesse respective 11 est à la vitesse de l'aiguille des heures comme l'espace a parcouru par la vitesse respective est à l'espace x parcouru en même-tems par l'aiguille des heures ; il est visible que $x = \frac{a \times 1}{11}$; (10. *Arith.*) quainsi pour avoir le point de rencontre il faut diviser la douziéme partie du cadran, ou, l'intervalle qui est entre les points de midi & d'une heure par 11, c'est-à-dire, par la vitesse respective ; c'est pourquoi l'aiguille des minutes attrapera celle des heures à la onziéme partie de la seconde heure, laquelle vaut $2 + \frac{8}{11}$ de deg. On peut déterminer de la même maniere les autres points du cadran où les aiguilles se rencontreront, en supposant qu'elles partent ensemble de l'endroit où elles se sont rencontrées en dernier lieu, & l'on trouvera qu'elles se rencontreront à 2 heures $\frac{2}{11}$, à 3 heures $\frac{3}{11}$, à 4 heures $\frac{4}{11}$, &c.

27. EXEMPLE SECOND. Pierre & Jean courent vers un même terme qui est éloigné d'eux de 300 toises, ils veulent arriver en même-tems ; mais Jean qui est plus jeune marche plus vîte, & sa vitesse est à celle de Pierre comme 5 est à 3 : on demande quel est le chemin que Pierre doit faire avant que Jean commence à marcher, afin qu'ils puissent arriver en même-tems.

Dans cet exemple le point de rencontre C est connu : il s'agit de trouver l'espace parcouru par la vitesse respective ; l'on a cette vitesse en retranchant 3 de 5, ainsi elle est égale à 2 (22) : il faut donc faire la proportion $5 . 2 :: 300 . x$, c'est-à-dire, la vitesse de Jean est à la vitesse respective comme l'espace parcouru par Jean est à l'espace

parcouru par la viteſſe reſpective ; donc $x = \frac{2 \times 300}{5} = \frac{600}{5} = 120$, c'eſt-à-dire, que Pierre doit avoir fait 120 toiſes auparavant que Jean ſe mette en chemin.

On pourroit propoſer pluſieurs autres exemples des mouvemens relatifs ; ceux-ci ſuffiſent pour faire entendre comment ſelon les conditions données il faut appliquer les principes qui viennent d'être poſés.

De la quantité de Mouvement.

28. Dans un même corps la quantité de mouvement eſt proportionnelle à la viteſſe : ſi la viteſſe augmente ou diminue, la quantité de mouvement reçoit des changemens ſemblables ; mais lorſqu'on compare les mouvemens de deux corps, la viteſſe ſeule n'en fait pas connoître la quantité : ſuppoſons que deux bales l'une de plomb, & l'autre de liege ſoient mûes d'une égale viteſſe, on apperçoit aiſément qu'il y a plus de mouvement dans la bale de plomb que dans la bale de liege, quoique les viteſſes ſoient égales, car la bale de plomb a plus d'effet en choquant que la bale de liege. Voici les principes ſuivant leſquels il faut déterminer cette quantité.

29. *Si deux corps de même matiere, l'un par exemple, ſix fois plus grand que l'autre, ſont mûs avec des viteſſes égales, le corps ſextuple a une quantité de mouvement ſix fois plus grande.* Car ſi la maſſe ſextuple étoit diviſée en ſix parties égales, chacune ſeroit égale au petit corps, & leur viteſſe ſeroit auſſi égale à celle de ce corps ; donc chaque partie auroit autant de mouvement que le petit corps ; donc le mouvement des ſix parties enſemble, ou ce qui revient au même, le mouvement du corps ſextuple eſt ſix fois plus grand que celui du petit corps.

30. *D'où il ſuit que ſi deux corps inégaux en maſſes ſont mûs avec des viteſſes égales, leurs quantités de mouvement ſont dans la raiſon des maſſes.*

31. La *masse* d'un corps est la quantité de matiere propre qu'il contient. Le *volume* est la grandeur du corps en tant qu'il est long, large & profond : nous verrons dans la suite que la masse est proportionnelle à la pesanteur ; mais le volume se mesure par les regles de la Géometrie.

32. *Si deux corps ont des masses égales & des vitesses inégales, leurs quantités de mouvement sont dans la raison des vitesses.* Il suffit de faire attention à l'idée de Mouvement pour concevoir que si deux bales égales en masses sont poussées avec des vitesses inégales, leurs quantités de mouvement le sont aussi ; & que si une des bales est mûe trois fois plus vîte, elle a un mouvement trois fois plus grand.

PROPOSITION II.

33. *Si deux corps* A, B *sont mûs d'une vitesse uniforme ; leurs quantités de mouvement sont entr'elles comme les produits des masses & des vitesses, ou en raison composée des masses & des vitesses.*

On suppose que toutes les parties des corps sont mûes en ligne droite sans rouler.

Démonstration. Supposons que le corps A ait une vitesse triple & une masse quadruple de celles du corps B, le rapport des masses est égal à celui de 4 à 1, & le rapport des vitesses égal à celui de 3 à 1 ; donc le rapport composé de ces deux raisons est égal à celui de 12 à 1. (4. *Arith.*) Je dis donc que les quantités de mouvement des corps A &B sont entr'elles comme les produits 12 & 1. Concevons que le corps A est divisé en quatre parties égales entr'elles & au corps B ; il est visible que la quantité de mouvement du corps A est quadruple de celle d'une de ces parties (30), & que le mouvement d'une des parties de ce corps est triple de celui du corps B (32) ; d'où il suit que que si on multiplie le mouvement 1 du corps B par 3, l'on aura le mouvement d'une des parties du corps A ; & si l'on multiplie le mouvement 3 d'une des parties par 4, le produit 12 sera le mouvement du corps A ; par conséquent le mouvement du corps A est au mouvement

du corps B comme 12 est à 1, c'est-à-dire, comme le produit de la masse & de la vitesse est au produit de la masse & de la vitesse; ou en raison composée de la masse à la masse, & de la vitesse à la vitesse. (4. *Arith.*)

34. *Corollaires.* 1°. *Si les quantités de mouvement sont égales, les vitesses sont entr'elles réciproquement comme les masses.* Car pour lors le produit de la masse du corps A & de sa vitesse est égal au produit de la masse du corps B & de sa vitesse; donc la vitesse du corps A est à la vitesse du corps B, comme la masse du corps B est à la masse du corps A (11. *Arith.*) par conséquent les vitesses sont entr'elles réciproquement comme les masses (3. *Arith.*)

35. 2°. *Si les vitesses sont entr'elles réciproquement comme les masses, les quantités de mouvement sont égales.* Car pour lors la masse du corps A & sa vitesse sont les extrêmes de la proportion, & la masse & la vitesse du corps B en sont les moyens (3. *Arith.*); donc le produit de la masse du corps A par sa vitesse est égal au produit de la masse du corps B par sa vitesse (12. *Arith.*): or les quantités de mouvement des mobiles A, B sont entr'elles comme ces produits égaux (33); donc elles sont égales.

36. 3°. *Si les quantités de mouvement sont entr'elles comme les vitesses, les masses sont égales; & si les mêmes quantités sont entr'elles comme les masses, les vitesses sont égales.* Car si les masses étoient inégales, les quantités de mouvement seroient entr'elles comme les produits des masses & des vitesses (33): or selon l'hypothèse ces quantités sont dans la raison des vitesses; donc il faut que les masses soient égales, autrement les quantités de mouvement ne seroient pas comme les vitesses, mais comme les produits des masses & des vitesses. Un raisonnement semblable montre que si les quantités de mouvement sont comme les masses, les vitesses sont égales.

37. Nous allons donner des formules avec lesquelles on peut abreger. Soient nommés E l'espace que le corps A parcourt, T le tems du mouvement, M sa masse, V sa vitesse, F sa quantité de mouvement; *e* sera l'espace parcouru par

le corps B, t le tems du mouvement, m sa masse, v sa vitesse, f sa quantité de mouvement. Cela posé 1°. V . v :: $\frac{E}{T}$. $\frac{e}{t}$ (7), donc $\frac{Ve}{t} = \frac{vE}{T}$, & en multipliant dabord par t, & ensuite par T, $VTe = vtE$ (15. *Arith.*) c'est là une premiere formule. 2°. La proposition (33) donne F . f :: MV . mv. Donc $Fmv = fMV$ (12. *Arith.*) c'est là une seconde formule; d'où l'on déduit V . v :: Fm . fM (11. *Arith.*) 3°. Puisque V . v :: tE . Te (12), & que V . v :: Fm . fM, donc Fm . fM :: tE . Te. (14. *Arith.*) donc $FmTe = fMtE$: c'est-là une troisiéme formule. Nous allons voir dans les Corollaires suivans quelques-uns de leurs usages.

38. 4°. *Si les tems des mouvements sont entr'eux comme les masses, les quantités de mouvement sont entr'elles comme les espaces parcourus.* Car puisque T . t :: M . m, donc $Tm = tM$ (12. *Arith.*); or $FmTe = fMtE$, donc si on divise ces deux produits égaux, le premier par Tm, & le second par tM, les quotiens Fe, fE seront égaux (15. *Arith.*), donc F . f :: E . e (11. *Arith.*), c'est-à-dire, que les quantités de mouvement F, f sont entr'elles comme les espaces E, e que les corps parcourent.

39. 5°. *Si les espaces parcourus sont égaux, les quantités de mouvement sont en raison composée de la raison directe des masses & de la raison inverse des tems.* Car puisque l'espace E est égal à l'espace e, si on divise les deux termes de la formule précédente par ces deux quantités égales, les quotiens FmT, fMt sont égaux (15. *Arith.*) donc F . f :: Mt . mT (11. *Arith.*): or dans cette proportion 1°. les produits Mt, mT sont en raison composée des racines M, m qui sont les masses, & des racines t, T qui sont les tems (4. *Arith.*) 2°. Il est évident que les masses M, m sont dans l'ordre direct des quantités F, f auxquelles elles répondent, & qu'au contraire les tems t, T sont dans un ordre inverse; (3. *Arith.*) ainsi les produits Mt, mT sont en raison composée de la raison directe des masses & de l'inverse des tems; donc les quanti-

tés de mouvement F, f qui sont dans la raison de ces produits sont aussi, &c.

40. 6°. *Si les tems des mouvemens sont entr'eux comme les vitesses, les espaces parcourus sont comme les quarrés des vitesses.* Car T. t :: V. v, donc Tv = tV (12. *Arith.*) d'ailleurs la formule VTe = vtE donne T. t :: vE. Ve (11. *Arith.*), donc V. v :: vE. Ve (14. *Arith.*) donc $V^2e = v^2E$ (12. *Arith.*) donc E. e :: V^2. v^2 (11. *Arith.*) On pourroit déduire plusieurs autres Corollaires de ces formules, on pourroit aussi les expliquer en nombres comme on a fait dans les principes, pour montrer que les conséquences que l'on en tire sont aussi certaines que si on les déduisoit des vérités précedentes par un raisonnement suivi; mais le lecteur suppléera par ses réflexions à ce que les bornes étroites d'un abregé, ne permettent pas d'exposer plus au long.

CHAPITRE II.

Des forces qui meuvent les corps.

41. DANS le Chapitre précédent nous avons consideré le Mouvement comme déja éxistent; dans celui-ci nous le considererons comme étant l'effet d'une cause. On nomme *cause* du mouvement tout ce qui le produit, ou qui concourt à sa production quelle que soit sa maniere d'agir.

42. *Puissance* est tout ce qui peut mouvoir un corps. Un corps en mouvement est une puissance, parce qu'il peut mouvoir les corps qu'il rencontre. Le mot de *cause* a une signification plus générale que le mot de *puissance*. La force d'une puissance est l'action qu'elle exerce, ou l'effort qu'elle fait pour mouvoir; on la prend souvent pour la puissance même. La *direction* d'une puissance est la ligne droite suivant laquelle elle tend à mouvoir un corps.

43. Le mouvement est produit par une seule puissance, & on peut l'appeller mouvement *simple*; ou plusieurs puissances

sances concourent à sa production, & il est appellé *composé*; le mouvement composé se fait sur une ligne droite ou sur une ligne courbe.

Du Mouvement produit par une seule puissance.

44. Un corps suivant l'idée qu'on en a est également susceptible de repos & de mouvement, & l'expérience montre qu'il est indifférent pour l'un & pour l'autre de ces états; s'il est en repos, il y demeure jusqu'à ce qu'une cause ou puissance l'en retire; s'il est en mouvement, il le conserve jusqu'à ce qu'un obstacle détruise sa vitesse & l'arrête.

45. Une puissance qui s'applique à un corps, produit le mouvement par une seule impulsion, ou bien elle renouvelle son action & poursuit le corps; dans le premier cas le mouvement est uniforme; dans le second le mouvement est acceleré: la puissance qui produit le mouvement par un seul effort, est appellée puissance *simplement motrice*; si elle le produit par une action réiterée, elle est appellée force *accélératrice*. Une force n'est accélératrice que parce qu'elle agit pendant plusieurs instans; mais si on la considere dans un seul instant, elle est réputée force simplement motrice pour cet instant. Une force simplement motrice n'est ni variable ni constante, puisqu'elle n'agit qu'un instant; mais la force accélératrice qui agit pendant plusieurs instans, est *constante* ou *variable*; *constante*, si son action est égale pendant des instans égaux; *variable*, si ses efforts augmentent. Ordinairement une force constante produit pendant des instans égaux des degrés égaux de vitesse, & le mouvement est uniformément acceleré si rien ne le détruit; la force variable communique pendant des instans égaux des degrés inégaux de vitesse: or quelle que soit la loi qui regle l'action de la puissance, les degrés de vitesse sont proportionnels à ses efforts; un effort double communique à un même corps une vitesse double; un effort triple est suivi d'une vitesse triple. Suivant l'axiome universellement reçu, *les effets sont proportionnels aux causes qui les produisent*. (On suppose que la force agit pleinement

sur le corps, en sorte que toutes les parties sont déterminées à aller suivant la même direction, & que l'action de la puissance n'est ni arrêtée ni modifiée par quoi que ce soit.)

46. *D'où il suit* 1°. *que si deux forces meuvent des corps égaux avec des vitesses inégales, elles sont entr'elles comme les vitesses.* Ce qui est évident. 2°. *Si deux forces font parcourir à deux corps égaux des espaces inégaux en même-tems, elles sont entr'elles comme ces espaces.* Car les tems des mouvemens étant égaux, les vitesses sont comme les espaces parcourus (5) : or les forces qui meuvent des corps égaux sont comme les vitesses ; donc elles sont entr'elles comme les espaces parcourus. 3°. *Si deux forces sont entr'elles comme les espaces qu'elles font parcourir à un même corps ou à deux corps égaux, elles les font parcourir en même-tems ou en tems égaux* ; car si l'un de ces espaces est double de l'autre, la force qui le fait parcourir sera (*hypp.*) aussi double de l'autre force ; donc elle communiquera à un même corps une vitesse double, donc les espaces parcourus sont entr'eux comme les vitesses ; donc ils sont parcourus en même-tems. (5)

47. *Si deux corps de masses inégales sont mûs avec des vitesses égales, les forces motrices sont entr'elles comme les masses inégales.* Car si l'on conçoit que le grand corps étant triple est divisé en trois parties égales entr'elles & au petit corps, la force qui sera appliquée à chaque partie, sera égale à celle qui meut le petit corps, puisque les masses & les vitesses de l'une des parties, & du petit corps sont égales : or la force des trois parties réunies en un seul volume est triple de la force de chacune d'elles, donc cette force totale qui ne differe point de celle du grand corps est aussi triple de celle qui meut le petit corps. Donc, &c.

PROPOSITION III.

48. *Deux forces instantanées ou simplement motrices qui meuvent des masses inégales avec des vitesses inégales, sont entr'elles comme les produits des masses & des vitesses, ou en raison composée des masses & des vitesses.* La preuve est la même que pour la Proposition seconde (33).

Démonst. Que la masse du corps A soit quadruple de celle du corps B, & la vitesse du corps A triple de celle du corps B; le rapport des masses est égal à celui de 4 à 1, & le rapport des vitesses égal à celui de 3 à 1; donc la raison composée de ces deux raisons est égale à celle de 12 à 1. (4. *Arith.*) Je dis donc que les forces appliquées aux corps A, B sont entr'elles comme les produits 12 & 1. Concevons que le corps A est divisé en quatre parties égales entr'elles & au corps B, elles auront chacune une vitesse triple de celle du corps B. Cela posé, la force du corps A est quadruple de celle d'une de ces parties (47.) puisqu'il a une masse quadruple & la même vitesse : or la force d'une des parties du corps A est triple de la force du corps B (46.) puisque les masses étant les mêmes, la vitesse de la partie est triple de celle du corps B; par conséquent si on multiplie la force 1 du corps B par 3, l'on aura la force qui est appliquée à l'une des parties du corps A; & si l'on multiplie la force 3 de l'une des parties par 4, le produit 12 sera la force du corps A; par conséquent la force du corps A est à la force du corps B comme 12 est à 1, c'est-à-dire, comme le produit de la masse & de la vitesse est au produit de la masse & de la vitesse, ou en raison composée de la masse à la masse, & de la vitesse à la vitesse. (4. *Arith.*)

49. Corollaire. 1°. *Les forces motrices de deux corps sont entr'elles comme les quantités de mouvement qu'elles produisent.* Car ces quantités sont entr'elles comme les produits des masses & des vitesses. (33) Donc, &c.

50. 2°. *Si les vitesses sont en raison réciproque des masses, les forces sont égales.* Car pour lors les quantités de mouvement sont égales (35); donc les forces qui sont entr'elles cemme les quantités de mouvement, sont aussi égales.

Les Corollaires de la Proposition seconde conviennent aussi aux forces motrices des corps, il n'est donc pas nécessaire de les repeter ici.

Des forces accélératrices.

51. Les forces accélératrices peuvent différer entr'elles en bien de manieres, selon que pour les comparer, il est nécessaire de faire entrer dans leur rapport plus ou moins de circonstances prises du tems, de l'espace, de la grandeur des masses, des vitesses, &c. Nous nous bornons ici à considerer la seule force constante.

52. *Les degrés de vitesses qu'acquiert un corps qui est poussé par une force accélératrice constante, sont entr'eux comme les tems.* Car le mobile reçoit à tous les instans de degrés de vitesse qui sont égaux entr'eux (45) ; d'ailleurs il les conserve tous, puisqu'aucun obstacle ne les détruit, comme on suppose ; donc les degrés de vitesse qu'il acquiert sont entr'eux comme les tems, dans un tems double il reçoit une vitesse double, &c. d'où il suit que son mouvement est uniformémeut acceléré.

53. Si l'on assemble par la pensée les instans de la durée de l'accélération à mesure qu'ils s'écoulent, l'on aura la progression des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Donc les degrés de vitesse acquise qui sont dans la raison des instans qui se sont écoulés, sont aussi dans la même progression.

54. Si la force accélératrice est infiniment petite, la vitesse qu'elle donne au premier instant, & dans chaque instant en particulier, est aussi infiniment petite ; c'est pourquoi la vitesse acquise pendant un instant peut être considerée comme étant nulle par rapport à la vitesse acquise après un tems fini.

55. *Si l'on suppose que les côtés* AB, BC *de l'angle droit du triangle rectangle* ABC [Fig. 7.] *répresentent, l'un sçavoir* AB *le tems, & l'autre* BC *la vitesse acquise après ce tems, & que par quelque point* D *du côté* AB *l'on mene une parallele* DE *à la base* BC, *elle répresentera la vitesse acquise après le tems* AD. Car les bases BC, DE de l'angle A sont dans la raison des côtés AB, AD (8. *Géom.*), c'est-à-dire, dans la raison des tems exprimés par AB, AD ; or les vitesses acquises pendant les tems AB, AD sont

aussi entr'elles comme ces tems (52) ; de plus BC selon l'hypothèse représente la vitesse acquise après le tems AB ; donc DE représente la vitesse acquise pendant le tems AD.

56. Si l'on conçoit le côté AB divisé en une infinité de parties égales, en autant qu'il y a d'instans dans le tems AB, que par les points de division l'on imagine des lignes telles que DE,GH paralleles à BC,elles répréseneront les vitesses acquises depuis le premier instant A jusqu'aux instans auxquels ces paralleles répondent ; ainsi les paralleles DE, GH répréſentent les vitesses acquises pendant les tems AD, AG ; & parce que les parties du tems sont infiniment petites, l'augmentation de vitesse que le mobile reçoit dans chacune d'elles est comme produite en un instant & sans succession : ainsi on peut regarder la vitesse de chaque instant comme uniforme pendant cet instant.

PROPOSITION. IV.

57. *L'espace qu'une force accélératrice constante & infiniment petite fait parcourir pendant le tems* AB [Fig.7.] *est répréſenté par le triangle* ABC.

Démonstration. Le tems AB étant divisé en parties infiniment petites ou en instans, le degré de vitesse que la force imprime au mobile à chaque instant est infiniment petit, puisqu'elle est supposée elle-même infiniment petite ; donc les paralleles DE,GH,BC, &c. qui représentent les vitesses acquises après chaque tems étant prises de suite depuis la base jusqu'au sommet, ne se surpassent aussi de suite que d'une partie infiniment petite ; elles sont donc infiniment proches les unes des autres, & remplissent l'aire du triangle. Cela posé, puisque le tems AB est divisé en parties égales, les espaces que le mobile parcourt dans deux instans sont entr'eux comme les vitesses acquises à ces instans, c'est-à-dire, comme les paralleles correspondantes ; ainsi les espaces parcourus aux instans D, G sont entr'eux comme les vitesses acquises pendant les tems AD, AG, c'est-à-dire, comme les paralleles DE,GH (5) ; ces paralleles répréſentent donc les espaces parcourus aux instans

D,G; par une raiſon ſemblable les autres paralleles repréſentent les eſpaces parcourus aux inſtans correſpondans; donc la ſomme des paralleles, c'eſt-à-dire, l'aire du triangle répréſente l'eſpace parcouru pendant le tems AB de l'accélération.

58. *Corollaire.* Si le mobile perd ſa viteſſe par les mêmes degrés qu'il l'a acquiſe, il ſera autant de tems à la perdre qu'il en a été à l'acquerir; & paſſant de nouveau par les mêmes degrés de viteſſe, il parcourra le même eſpace qu'il a parcouru durant l'accélération; ainſi cet eſpace eſt repréſenté par le triangle ABC.

PROPOSITION V.

59. *Deux forces accélératrices conſtantes ſont entr'elles 1°. comme les viteſſes qu'elles produiſent en même-tems dans deux mobiles égaux. 2°. Elles ſont auſſi entr'elles comme les eſpaces qu'elles leur font parcourir en même-tems.*

Premiere Partie. Puiſque les mobiles ſont égaux, les forces ſont entr'elles comme les viteſſes inſtantanées qu'elles leur communiquent (45); de plus ſi on multiplie ces viteſſes par le tems de l'accélération qui eſt le même pour l'un & l'autre mobile, l'on aura les viteſſes acquiſes pendant ce tems (52), leſquelles ſeront encore entr'elles comme les viteſſes inſtantanées (8. *Arith.*); donc les forces dont il s'agit qui ſont entr'elles comme les viteſſes inſtantanées, ſont auſſi comme les viteſſes que les mobiles acquierent durant le tems de l'accélération.

Si les maſſes ſont inégales, les forces ſont entr'elles comme les quantités de mouvement qu'elles produiſent en même-tems. Car ſi les maſſes étoient égales, les forces ſeroient entr'elles comme les viteſſes produites en même-tems; mais ſi la premiere force meut une maſſe double ou triple, il faudra qu'à chaque inſtant du mouvement elle faſſe un effort deux, trois fois plus grand, pour communiquer à cette maſſe double ou triple la même viteſſe (47); ainſi pour avoir le rapport des forces conſtantes, il faut multiplier les maſſes qu'elles meuvent par les viteſſes qu'elles leur commu-

niquent en tems égaux; donc ces forces sont entr'elles comme les quantités de mouvement qu'elles produisent en même-tems.

II. Partie. Les espaces que ces deux forces font parcourir sont représentés par deux triangles rectangles dont les bases représentent les vitesses acquises, & les hauteurs, les tems (57); or selon l'hypothèse les tems sont égaux; donc les triangles dont les hauteurs égales représentent ces tems égaux, sont entr'eux comme les bases, c'est-à-dire, comme les vitesses acquises (36. *Géom.*); donc les espaces parcourus sont aussi entr'eux comme les vitesses acquises; donc les forces qui sont entr'elles comme ces vitesses (*I. Partie*) sont aussi entr'elles comme les espaces parcourus.

Du Mouvement en ligne droite composé de plusieurs forces.

60. Le Mouvement composé est produit par plusieurs forces qui agissent conjointement & en même-tems sur un corps.

61. Un corps qui est tiré ou poussé à la fois par deux puissances peut être en repos ou en mouvement; il est en repos si les puissances sont égales, & directement opposées: c'est-là un axiome ou proposition évidente par elle-même. Mais le corps est en mouvement 1°. si les puissances qui le tirent ou le poussent en des sens directement opposés sont inégales, parce que la plus forte l'emporte sur la plus foible; 2°. si les directions font un angle; car deux puissances ne peuvent s'empêcher totalement ou se détruire, si leurs efforts ne sont directement opposés: ainsi le corps K étant poussé à la fois par les puissances M, N [*fig.* 8.] suivant les directions CA, CB qui font l'angle ACB ne peut être en repos, puisque l'effort suivant CB ne peut point empêcher l'effort suivant CA. 3°. Il est évident que le corps K qui est tiré ou poussé à la fois suivant les directions CA, CB qui font l'angle ACB, n'est mû ni suivant CA, car la puissance N l'en empêche; ni suivant CB, parce que

la puissance M s'y oppose ; le corps K est donc mû suivant une direction CD moyenne entre les directions CA, CB :

4°. On démontre deux Propositions fondamentales touchant les mouvemens composés. La premiere est que si deux puissances M, N sont entr'elles comme les côtés CA, CB d'un parallelogramme AB formé sur leurs directions CA, CB elles font décrire au corps K la diagonale CD du parallelogramme AB, dans le tems que chacune d'elles lui feroit décrire le côté suivant lequel elle le pousse, par exemple, dans le tems que la puissance M lui feroit décrire le côté CA, ou la puissance N le côté CB. La seconde proposition est l'inverse de la premiere. Si le corps K étant tiré ou poussé à la fois suivant les directions CA, CB, qui font l'angle ACB, par les puissances, M, N, décrit la diagonale CD du parallelogramme AB, les puissances M, N sont entr'elles comme les côtés CA, CB, & par conséquent elles feroient décrire au corps K, chacune le côté suivant lequel elle le pousse dans le tems qu'il décrit la diagonale. Pour plus de facilité on va premierement démontrer la seconde de ces Propositions, & ensuite la premiere.

PROPOSITION VI.

62. *Si le corps* K [Fig. 8.] *décrit la diagonale* CD *du parallelogramme* AB, *les puissances* M, N *sont entr'elles comme les côtés* CA, CB.

Supposons que les Puissances M, N sont appliquées au corps K pendant l'instant qu'il décrit la partie infiniment petite C*p* de la diagonale CD, leurs directions étant toujours paralleles à CA, CB, il est évident que le centre C arrivant en *p*, *p*G parallele à CA est pour lors la direction de la puissance M, & E*p* parallele à CB la direction de la puissance N. Cela posé, si la puissance M avoit agi seule sur le corps K, dans le tems qu'il est allé de C en *p*, il seroit allé à quelque point de la direction CA ; donc puisqu'il est en *p*, il faut que la puissance N l'ait écarté de la direction CA ; cette puissance a donc agi comme si elle avoit fait venir le mobile de E en *p*, & qu'elle lui eût fait parcourir E*p* ;

pareillement la puissance M a agi comme si elle avoit fait venir le mobile de G en *p* & qu'elle lui eut fait parcourir G*p*, donc les efforts des puissances M, N sont entr'eux comme G*p*, E*p*, ou leurs égales CE, E*p* (46, 5) : or les triangles semblables CE*p*, CAD donnent CE. E*p* : : CA. AD ou CB (8. *Géom.*), c'est-à-dire, que les efforts des puissances M, N ou les puissances elles-mêmes sont entr'elles comme les côtés CA, CB du parallelog. AB.

63. *Coroll.* Il est évident que l'effort composé suivant CD est aux puissances M, N, comme la diagonale CD est aux côtés CA, CB : car tandis que par l'effort composé le corps K décrit C*p*, les puissances M, N lui feroient décrire CE, E*p* (62.) ; donc l'effort composé est aux puissances M, N comme C*p* est à CE, & E*p* ; (46. *n.* 2.) or ces trois lignes sont entr'elles comme CD, CA, & AD ou CB (8. *Géom.*) ; donc l'effort composé & les puissances M, N sont dans la raison de ces trois lignes. Donc le corps K décriroit ces trois lignes en tems égaux par les efforts dirigés suivant ces mêmes lignes (46. *n.* 3.)

PROPOSITION VII.

64. *Si les puissances* M, N *sont entr'elles comme les côtés* CA, CB *du parallelogramme* AB *formé sur leurs directions* CA, CB [Fig. 8.] *elles font décrire par leur effort composé, au corps* K *la diagonale* CD *dans le tems que chacune lui feroit décrire le côté qui est sur sa direction.*

Si cela n'arrivoit point, ce seroit parce que les puissances M, N seroient ou trop grandes ou trop petites ; si cela est, supposons en deux qui par leur effort composé puissent faire décrire au corps K la diagonale CD dans le tems que les puissances M, N lui feroient décrire chacune le côté suivant lequel elle le pousse, ce qui est toujours possible, puisqu'il suffit pour cela d'augmenter ou de diminuer les puissances M, N : or les puissances supposées en faisant décrire au corps K la diagonale CD feroient des efforts égaux aux puissances M, N ; car par ces efforts elles feroient décrire au corps K les côtés CA, CB tandis que par leur ef-

fort composé elles lui font décrire la diagonale CD (*61.* *63*), c'est-à-dire, qu'elles les lui feroient parcourir dans le même-tems que les puissances M, N le peuvent; (46. *n.* 3.) par conséquent les puissances supposées ne different point des puissances M, N. Donc les puissances M, N feront décrire, &c.

65. On peut donner une preuve sensible de cette Proposition. Il faut concevoir que le corps K [*fig.* 9.] est mû sur la regle CB, & qu'il en parcourt la longueur tandis que la regle étant mûe parallelement à elle-même décrit par son extrémité C le côté CA. Cela posé, je dis que le corps K pendant tout le tems du mouvement de la regle sera sur la diagonale CD, & par conséquent la décrira dans le tems que par sa vitesse propre il parcourt la longueur CB. Supposons que la regle est arrivée au point E du côté CA, elle coupera la diagonale CD au point P, & l'on aura les deux triangles semblables CEP, CAD, qui donnent CA. AD : : CE. EP; (8. *Géomet.*) Or les côtés CA, CB ou AD sont parcourus en même-tems par les vitesses propres de la regle & du mobile K; donc ces lignes sont entr'elles comme les vitesses (5); donc CE & EP sont dans la raison des vitesses (14. *Arith.*) donc ces espaces sont parcourus en même-tems (5); donc tandis que la regle parcourt CE, le corps K parcourt EP; par conséquent il se trouve sur la diagonale CD : on prouvera de même qu'en quelque point de la ligne CA que la regle se trouve, le corps K est sur la diagonale.

66. Si les forces M, N sont instantanées ou simplement motrices, le mobile décrit la diagonale CD d'un mouvement uniforme; mais il la parcourt d'un mouvement accéléré, si ces forces sont constantes ou variables; pour lors la diagonale CD est encore une ligne droite, pourvu que dans le cas où les forces M, N sont variables, elles gardent entr'elles un rapport constant; mais si leur rapport n'est pas toujours le même, le mobile décrira une ligne courbe.

67. *Coroll.* 1°. L'effort composé suivant CD & les puissances M, N sont dans la raison de cette diagonale & des côtés CA, CB; car le mobile K parcourroit ces trois lignes en même-tems ou en tems égaux, par les efforts dirigés suivant ces mêmes lignes (64); donc ces efforts sont dans la raison de ces lignes (46. *n.* 2.)

68. 2°. L'effort suivant la diagonale CD est moindre que la somme des efforts dirigés suivant CA, CB, car la diagonale CD qui représente l'effort composé, est moindre que la somme des côtés CA, CB qui représentent les efforts M, N dirigés suivant ces côtés.

69. 3°. Puisque les forces M, N se composent en une, laquelle est exprimée par la diagonale CD, on peut au lieu de ces forces en substituer une seule, ou supposer que le mobile est mû par les puissances M, N, comme il le seroit s'il ne recevoit son impulsion que d'une seule force dirigée suivant CD & exprimée par la même CD.

70. 4°. Si le corps est poussé à la fois par trois puissances M, N, R suivant les directions CA, CB, CE, [*fig.* 10.] avec des efforts exprimés par ces lignes, on déterminera la vitesse & la direction de ce corps, si on décrit sur CA & CB le parallelogramme AB dont la diagonale est CD. 2°. Si sur cette diagonale & CE prises pour côtés, on décrit un autre parallelogr. DE dont la diagonale est CG: je dis que le mobile ira suivant CG avec une vitesse exprimée par cette ligne. Car si le mobile n'étoit poussé que par les forces M, N, il décriroit la diagonale CD: de plus une puissance dirigée suivant CD auroit autant d'effet pour mouvoir le corps K que les deux puissances M, N ensemble (69); mais s'il n'étoit poussé que suivant CD & CE, il décriroit la diagonale CG (64); donc il la décrira étant poussé à la fois suivant CA, CB, CE, & sa vitesse sera exprimée par CG, c'est-à-dire, qu'il décrira cette diagonale dans le tems que la puissance R lui feroit parcourir CE.

De la décompoſition des forces & du Mouvement.

71. L'expérience journaliere nous apprend que non-ſeulement les forces & les mouvemens ſe compoſent, mais elle montre encore qu'une ſeule force peut ſe décompoſer en pluſieurs efforts; ſi l'on pouſſe un bâton contre un plancher en l'inclinant, il gliſſe & preſſe le plancher; or ce n'eſt point en tant qu'il gliſſe qu'il fait effort contre le plancher, puiſque s'il étoit pouſſé ſuivant une direction parallele à ſa ſurface, la preſſion ſeroit nulle: d'où il ſuit que la force qui pouſſe le bâton eſt décompoſée en deux efforts. Cette décompoſition paroît même dans la compoſition des forces; car dans le tems qu'elles s'accordent à mouvoir le corps ſur la diagonale, elles ſe réſiſtent, parce que chacune tend à le mouvoir ſuivant ſa direction.

72. Suppoſons que le corps K [*Fig.* 11.] eſt pouſſé à la fois par les puiſſances M, N ſuivant les côtés CA, CB du parallelogramme AB, le coté CB étant perpendiculaire à la diagonale CD, il eſt certain (64.) que le corps décrira cette diagonale, ſi les puiſſances M, N ſont exprimées par les cotés CA, CB; mais puiſque la direction de la puiſſance N eſt perpendiculaire à la direction CD que le mobile ſuit, il eſt évident qu'elle ne pouſſe le corps K ni en avant ni en arriere, & que tout ſon effort eſt employé à le retenir ſur la diagonale; mais ce même effort tend auſſi à l'en éloigner: il faut donc que la puiſſance M lui réſiſte, & qu'elle en produiſe un autre qui lui ſoit égal & directement oppoſé (61); par conſéquent la puiſſance M eſt décompoſée en deux efforts, l'un par lequel elle meut le corps ſuivant la diagonale CD, l'autre par lequel elle réſiſte à la puiſſance N. Il eſt évident que l'effort par lequel la puiſſance M réſiſte à la puiſſance N, eſt exprimée par AD ou ſon égale CE.

73. Si les directions des puiſſances M, N [*Fig.* 12.] ſont obliques à la diagonale CD, à l'inſtant qu'elles ſe compoſent pour mouvoir le corps ſur cette diagon. elles ſe réſiſtent également, puiſqu'elles tendent chacune à mouvoir le corps

ſuivant ſa direction : or les efforts par leſquels elles ſe réſiſtent ſont perpendiculaires à la diagonale CD, autrement ces efforts ne ſeroient pas uniquement employés à ſe contrebalancer, mais à mouvoir le corps ſur la diagonale : c'eſt pourquoi, ſi comme dans la *figure* 11, ſur les lignes CA, CB qui repréſentent les puiſſances M, N priſes pour diagonales, on décrit les rectangles EL, FG, les côtés CE, CF expriment les efforts par leſquels les puiſſances M, N ſe réſiſtent ; & les parties CL, CG les efforts qu'elles font pour mouvoir ce corps ſur la diagonale CD.

74. Si on conçoit que la ligne CD [*fig.* 11.] repréſente un plan qui réſiſte contre lequel le corps K eſt pouſſé obliquement par la puiſſance M ſuivant la direction MCA, ce plan ſera la même réſiſtance à la puiſſance M que la puiſſance N ; c'eſt pourquoi cette puiſſance eſt encore décompoſée en deux efforts exprimés par CE ou DA & CD ; par l'effort CE le corps preſſe le plan, & par l'effort CD il gliſſe ſur ce plan. Plus l'angle MCD ſera grand ou ſon ſupplément ACD aigu, le côté CA, ou la puiſſance M que ce côté repréſente demeurant la même, plus l'effort DA ou CE par lequel elle preſſe le plan eſt petit ; en ſorte que ſi l'angle MCD devient infiniment grand, ou l'angle ACD infiniment petit, pour lors DA ou CE ſera nulle, & la direction MCA étant parallele, le plan ceſſera d'être preſſé : ſi au contraire l'angle MCD devient droit, pour lors la direction CA étant perpendiculaire au plan, tout l'effort de la puiſſance M eſt employé à preſſer le plan.

75. Si le corps K [*fig.* 13.] preſſe à la fois les plans OR, OS, étant pouſſé ſuivant CA avec une force exprimée par la même CA, cette force eſt néceſſairement décompoſée en deux efforts ; ce qui eſt évident, puiſqu'elle preſſe les plans OR, OS ſuivant les directions CG, CP : or je dis qu'ils ſont perpendiculaires aux plans OR, OS. Concevons que les triangles OLR, OLS repréſentent deux coins ou deux priſmes poſés ſur le plan LOL, il eſt certain que le corps K tend à les éloigner & à les faire gliſſer ſur le plan LOL, & que pour empêcher ces mouvemens il faut appliquer deux

forces qui réagissant suivant FG, BP paralleles à LOL, leur soient directement opposées(61): ces forces étant obliques aux plans OR, OS, se décomposent chacune en deux efforts, l'un parallele, l'autre perpendiculaire; les efforts paralleles feroient glisser les plans sur le corps K, si ces plans ne se rencontroient pas au point O; mais les efforts perpendicul. repoussent le corps K suivant GCD, PCE, & résistent aux efforts qu'il fait aux points G, P; donc ces efforts des puissances sont directement opposés à ceux du corps K (61). Il est évident que les efforts suivant GCD, PCE produisent un effort composé égal & directement opposé à la force du corps K (61); qu'ainsi ils tendent à lui faire décrire la diagonale Ca=CA (61. 62). Or que les coins ou prismes soient retenus par des puissances ou autrement, le corps K agit de la même maniere sur les plans OR, OS. Donc lorsque ce corps presse ces plans, il se fait aux points G, P deux efforts perpendiculaires qui sont exprimés par les cotés CE, CD du parallelogramme ED dont la diagonale Ca=CA exprime la force du corps K (62).

De la maniere dont l'Equilibre se forme, déduite de la composition & décomposition des forces.

76. L'Equilibre est l'état de plusieurs forces ou puissances qui agissent les unes contre les autres de maniere que tout demeure en repos. Dans l'équilibre les puissances tendent à des efforts opposés, & parce qu'aucune ne prévaut, elles produisent le repos avec la tendance au mouvement. De quelque maniere que l'on s'y prenne pour prouver l'équilibre, il faut reconnoître, ou du moins supposer, 1°. que deux puissances peuvent se composer en une, puisqu'une force unique peut les tenir en équilibre : ce qui est évident par l'exemple de deux poids qui sont en équilibre aux extrémités d'une balance; car la main qui la soutient est chargée comme si elle ne portoit qu'un poids: 2°. Qu'une puissance se décompose en deux ou plusieurs efforts; ce qui paroît par l'exemple d'un poids qui étant

ſuſpendu au milieu d'une regle, charge ou preſſe les appuis qui la ſoutiennent à ſes deux extrémités.

77. *Lorſque deux puiſſances* M, N *ont leurs directions qui concourent en un point, elles peuvent être tenues en équilibre par une troiſiéme.* Car étant immédiatement appliquées au point de concours conſidéré comme un point phyſique, elles tendent à le mouvoir ſuivant une direction moyenne, c'eſt-à-dire, ſituée entre leurs directions propres (61. *n.* 3.); de ſorte que ſi on oppoſe à l'effort compoſé ſuivant la direction moyenne un obſtacle ou une puiſſonce égale qui réagiſſe en ſens contraire, cet effort ſera en équilibre, & les puiſſances qui le produiſent ne pouvant mouvoir le corps, y ſeront auſſi. Si les directions ſont paralleles, on peut ſuppoſer qu'elles font un angle infiniment petit; ainſi ce cas extrême n'eſt pas même excepté de l'équilibre.

78. Lorſque deux puiſſances ont leurs directions en un même plan, elles peuvent être miſes en équilibre avec une troiſiéme, car leurs directions concourent, ou bien elles ſont paralleles.

79. *Mais ſi les directions* MA, NB *des puiſſances* M, N [fig. 14.] *ne concourent point, comme lorſqu'elles ſont en différens plans, une ſeule puiſſance ne peut point les tenir en équilibre.* Suppoſons, par exemple, que la regle ZX étant ſur un plan horiſontal la direction MA eſt ſur ce plan, & que la direction NB eſt en l'air au-deſſus de ce plan; à quelque point C que la puiſſance P s'applique elle ne pourra point empêcher que les extrémités Z, X n'obéiſſent aux puiſſances qui les tirent. Ce qui eſt évident.

80. *Mais ſi les directions* CA, CB *des puiſſances* M, N [fig. 15.] *appliquées aux points* A, B *de la regle* ZX, *concourent au point* C, *ces puiſſances pourront être miſes en équilibre avec une ſeule force* P. Suppoſons que ces puiſſances ſont immédiatement appliquées au point de concours C, elles ſeront en équilibre avec la puiſſance P, ſi cette puiſſance dirige ſon action en ſens contraire de l'effort compoſé, que l'on ſuppoſe être ſuivant CF: or je dis

que si les puissances M, N sont rétablies en leur lieu, & qu'elles tirent aux points A, B la regle ZX suivant leurs premieres directions CAM, CBN, elles seront encore en équilibre avec la puissance P. Il faut concevoir que la direction FCP est une ligne ou regle inflexible fermement attachée à la regle ZX, & que les puissances *m*, *n* égales aux puissances M, N tirent le point C en des sens directement opposés aux puissances M, N; il est certain que *m* fera équilibre avec M, & *n* avec N; cela étant, il est visible que les puissances M, N tireront le point C comme si elles y étoient immédiatement appliquées, & que par conséquent elles se composeront en un effort qui sera encore dirigé suivant CF; mais la puissance P fait équilibre avec cet effort; donc elle fera aussi équilibre avec les puissances M, N qui le produisent. La regle ZX est appellée *Levier.* Si les puissances M, N, P étant en équilibre sur le levier ZX, étoient appliquées au point de concours C suivant les mêmes directions, elles seroient encore en équilibre, ce qui est évident: car le point C seroit encore tiré de la même maniere, & l'effort composé des puissances M, N tendroit à le mouvoir suivant CF; mais elles en seroient empêchées par la puissance P.

81. *Si la puissance* P *fait équilibre avec les puissances* M, N *appliquées au levier* ZX, [fig. 16.] *sa direction* FP *doit passer par le point de concours* C *des directions* CAM, CBN. Car les points L, D où les directions des puissances M, N rencontrent la direction FP, seroient tirés suivant les lignes LP, LAM, DP & DBN supposées des cordons flexibles: or ces lignes deux à deux font des angles; donc les points L, D seroient mûs (61. *n.* 2.), puisque rien ne s'oppose à leur mouvement: ainsi il n'y auroit point équilibre. *Non-seulement la direction de la puissance* P *doit concourir avec les directions des puissances* M, N *en un même point, mais elle doit encore être sur le même plan.* Car les puissances M, N se composent sur le plan suivant lequel elles sont dirigées: or la puissance P résiste à cet effort composé, elle doit donc lui être égale & directement

opposée

opposée (61. *n*. 1.); donc la direction de cette puissance doit être dans le plan des directions des puissances M, N.

82. *Corollaire général.* Il suit de ce qui vient d'être dit que les conditions nécessaires à l'équilibre de trois puissances sont, 1°. Que leurs directions soient en un même plan; 2°. qu'elles concourent toutes trois en un point; 3°. que deux d'entr'elles se composent en un effort auquel la troisiéme résiste en réagissant directement contre cet effort: ces conditions ont lieu soit que les puissances fassent équilibre sur un levier, soit qu'elles tirent ou poussent le point où leurs directions concourent.

Du Parallelogramme des forces.

83. Les notions que l'on vient de donner de l'équilibre de trois puissances, sont nécessairement liées avec les différens principes que les Auteurs mettent en œuvre pour en déduire la loi de l'équilibre, quoiqu'ils ne les énoncent pas toujours d'une maniere claire & expresse; il n'y en a néanmoins aucun qui ait avec elles une liaison si marquée que le principe qui prouve que trois puissances sont en équilibre lorsque leurs directions étant en un même plan, & concourant en un même point, elles sont entr'elles comme les côtés & la diagonale d'un parallelogramme fait sur ces directions, & que de plus celle qui est placée sur la diagonale tire en sens contraire des deux autres qui agissent suivant les côtés; ce principe est appellé *Parallelogramme des forces*, parce que les côtés & la diagonale de tout parallelogramme représentent trois puissances qui peuvent faire équilibre entr'elles: celles qui agissent suivant les côtés produisent un effort qui est dirigé le long de la diagonale; de sorte que si on lui oppose une force qui lui soit égale, les puissances qui tirent suivant les côtés seront en équilibre; or cet effort est exprimé par la diagonale: donc la puissance résistante doit être représentée de même par la diagonale.

Du Mouvement composé en ligne courbe, & de la force centrale.

84. Une seule puissance suffit pour faire décrire à un corps la ligne droite, mais il en faut plus d'une pour lui faire tracer une ligne courbe; ce mouvement est donc composé.

1°. Si l'on attache un corps de figure sphérique à l'un des bouts d'un cordon, dont l'autre bout soit arrêté à un point fixe, sur un plan horisontal ou de niveau, par exemple, sur un plancher; qu'on fasse décrire au corps une circonférence de cercle sur ce plan autour du point fixe, on s'apperçoit qu'il bande le cordon, & cela d'autant plus, qu'il va plus vîte; si le cordon vient à se rompre, le corps discontinue de tourner, & commence dès ce moment à aller suivant la ligne droite: or il est visible que le cordon attaché au point fixe ne fait que ce que feroit une puissance qui à chaque instant pousseroit ou tireroit le mobile vers ce centre ou point fixe.

2°. Les Géomètres conçoivent les lignes courbes comme des polygones d'une infinité de côtés. Cela posé, lorsqu'un corps décrit une ligne courbe, il se trouve successivement sur différentes lignes droites qui font entre elles des angles, & à chaque nouvel angle il faut que le mobile quitte sa direction pour en suivre une autre; or ce n'est pas son mouvement actuel qui le détourne ainsi de sa direction, puisque c'est ce mouvement-là même qui détermine le corps à poursuivre son chemin suivant la même ligne droite; il est donc nécessaire qu'une nouvelle cause se joignant au mouvement qu'il a, lui donne à chaque instant une nouvelle détermination.

85. *D'où il suit qu'un corps qui est en mouvement suit la ligne droite, ou bien qu'il tend à la suivre lorsqu'il en est empêché.*

86. *Lorsqu'un corps est mû sur une ligne courbe, la ligne droite qu'il tend à suivre, est la tangente de la courbe au point où le mobile se trouve.* Car le mobile tend à continuer

son mouvement suivant le petit côté qu'il décrit dans l'instant qu'il en est détourné : or la tangente de la courbe au point où le mobile se trouve pour lors, est le prolongement de ce côté-là même ; donc le mobile tend à s'échapper par la tangente.

87. Si la cause qui retient un mobile sur une courbe, dirige son action vers un même point, elle est appellée *force centripete* ; la résistance ou l'effort contraire que le mobile fait à cette force, est appellé *force centrifuge* ; & les deux forces ensemble sont appellées *forces centrales* ; c'est-à-dire, forces dont l'une sollicite le corps à s'approcher du centre, & l'autre tend à l'en éloigner.

88. *Ces deux forces sont égales, & elles agissent en des sens directement opposés.* Cela paroît évident par ce qui vient d'être dit d'un corps qui tourne autour d'un point fixe sur un plan horisontal ; la force qui retient le cordon & qui ramene le corps sur la circonférence lorsqu'il fait effort pour aller suivant la tangente, & celle par laquelle le corps tend à s'éloigner du centre, sont égales l'une & l'autre à la tension du cordon ; car le cordon est également tendu en sens contraires. En effet, si l'une de ces forces étoit plus grande que l'autre, le corps s'éloigneroit, ou il s'approcheroit davantage du centre, puisqu'étant directement contraires, la plus foible céderoit de nécessité à la plus puissante : d'où l'on voit que ces forces ne different que dans la maniere de les concevoir, en ce qu'elles agissent dans des sens directement opposés.

Il nous suffira dans cet Abrégé de considérer la force centrale dans le cercle conçu comme polygone d'une infinité de côtés.

Du Mouvement d'un corps qui décrit un Polygone régulier d'un nombre infini de côtés, & de la force centrale dans le cercle.

89. Pour faire décrire à un corps un polygone, il faut 1°. qu'il reçoive une impulsion suivant un des côtés ; 2°.

lorsqu'il est arrivé à un des angles du polygone, qu'il y ait une cause qui le détourne & le ramene sur un nouveau côté. Supposons que le corps K [*Fig.* 17.] parcoure le côté AD d'un polygone régulier avec une certaine vitesse, par exemple, dans une seconde, lorsqu'il sera arrivé à l'angle D, il continueroit de se mouvoir sur le prolongement du côté AD; mais si au point D il y a une force qui le détourne sur le côté DB, il décrira par l'action conjointe de cette force & de celle que la vitesse qu'il a lui donne, la diagonale du parallelogramme GF, laquelle selon l'hypothèse est située sur le côté DB; lorsque le mobile sera arrivé à l'angle B, il sera encore détourné comme il l'a été à l'angle D, & décrira la diagonale d'un nouveau parallelogramme, laquelle selon l'hypothese sera sur le côté BI; ces différentes reprises feront décrire au mobile le polygone régulier.

PROPOSITION VIII.

90. *Si la force qui retient le mobile* K *sur un polygone régulier dirige son action au centre* C [Fig. 17.], *tous les côtés sont décrits en des tems égaux.*

Démonst. Puisque le corps K étant arrivé en D, décrit selon l'hypothèse, le côté DB par une force composée de celle que lui donne la vitesse initiale suivant ADF, & de la force qui en le poussant au centre C le ramene sur le côté DB, il s'ensuit que ces trois forces sont entr'elles comme les trois côtés DF, DG, DB du parallelogramme FG (62, 63): cela posé, les triangles FDB, DCB sont semblables, car les deux angles ADB, FDB pris ensemble valent deux droits (30. *Géom.*); de plus le même angle ADB & l'angle C valent aussi deux droits (31. *Géom.*); donc l'angle FDB est égal à l'angle C; d'ailleurs DBF est égal à l'angle BDC (29. *Géom.*); donc les triangles FDB, DCB sont semblables (8. *Géom.*); par conséquent le triangle FDB est isoscele, de même que le triangle DCB; donc FD=AD; donc avec la vitesse initiale le corps parcourroit DF dans le tems qu'il a parcouru AD: mais il par-

court DB dans le tems qu'il parcourroit DF (63); donc il parcourt DB dans un tems égal au tems par AD. On démontrera de la même maniere que le tems par les autres côtés est égal au tems par AD. Donc, &c.

91. *Corollaire.* 1°. Si un corps décrit une circonférence de cercle, & que la force qui l'y retient dirige son action au centre, il est mû d'une vitesse uniforme, puisqu'il en parcourt tous les côtés en tems égaux.

92. 2°. *Cette force est infiniment petite dans le cercle :* car les triangles semblables DBG, DCB donnent DC . DB :: DB . DG (8. *Géom.*) : or on sçait que dans le cercle le rayon DC est infiniment grand par rapport à un des côtés DB de la circonférence ; donc DB est aussi infiniment grande par rapport à DG : mais la force qui meut le corps sur la circonférence & la force qui l'y retient ou qui empêche qu'il ne s'en éloigne, sont entr'elles comme DB & DG (90) ; donc la force qui meut le corps sur une circonférence, est infiniment grande par rapport à celle qui l'y retient, & par conséquent celle-ci infiniment petite.

93. 3°. *Si un corps décrit une circonférence de cercle, & que la force qui l'y retient dirige son action au centre, le rayon vecteur décrit des aires ou des secteurs de cercle, égaux en tems égaux.* Par rayon vecteur il faut entendre le rayon du cercle, en tant qu'il tourne & que l'une des extrémités accompagne le corps, l'autre étant immobile au centre. Il est évident que ce rayon décrit en tournant de la sorte des secteurs de cercle : or je dis que les secteurs qu'il décrit en tems égaux sont égaux, car le rayon vecteur, de même que le corps qu'il accompagne sont mûs d'une vitesse uniforme ; donc les aires ou secteurs de cercle décrits en tems égaux sont égaux.

94. 4°. Nous avons supposé que le mobile parcouroit l'un des côtés du polygone dans une seconde : il est évident que si cette vitesse augmentoit que, par exemple, le corps au lieu de décrire AD dans une seconde, pût parcourir D*f* double ou triple de AD dans le même-tems d'une seconde, il faudroit que la force qui le retient sur le

polygone augmentât de même, pour lors cette force au lieu d'être exprimée par DG ou FB, le seroit par *fb*. Car lorsque deux forces font décrire à un corps la diagonale d'un parallelogramme, si l'une d'elles augmente, l'autre doit recevoir des augmentations semblables.

D'où il suit que si deux mobiles égaux décrivent des circonf. de cercle, les forces qui les y retiennent sont à chaque changement de côté des efforts qui sont dans la raison des vitesses.

Pour comparer les forces centrales de 2 mobiles égaux, il faut avoir égard non-seulement à leurs vitesses, mais encore aux nombres des côtés que les corps décrivent en même-tems ou au nombre de fois que les forces centrales agissent en même-tems.

PROPOSITION IX.

95. *Les forces centrales de deux corps égaux sont entr'elles comme les produits des vitesses multipliées par les nombres de côtés qu'ils décrivent en même-tems.*

Démonstration. Si les mobiles décrivoient sur leurs circonférences un égal nombre de côtés, les forces centrales agiroient autant de fois l'une que l'autre, ainsi elles seroient entr'elles comme les vitesses des mobiles; en sorte que si les vitesses sont entr'elles comme 3 & 2, les forces centrales seroient aussi dans le rapport de 3 à 2 (94); mais si le corps K décrit quatre côtés sur sa circonférence dans le tems que le corps Z n'en parcourt qu'un, la force centrale du corps K agira quatre fois davantage en même-tems; donc le rapport des forces centrales sera quadruple de celui des vitesses 3 & 2, & par conséquent égal à celui de 12 à 2 (18. *Arith.*), c'est-à-dire, que les forces centrales sont entr'elles comme les psoduits 12 & 2 des vitesses 3 & 2, par les nombres 4 & 1 des côtés décrits en même-tems.

96. *Corollaire.* 1°. *Si deux corps décrivent des circonférences égales, les forces centrales sont comme les quarrés des vitesses.* Supposons que les vitesses soient entr'elles comme 3 & 2; donc le corps K avec la vitesse 3 décrira

trois côtés de sa circonférence tandis que le corps Z avec la vitesse 2 en décrira deux sur la sienne (5), puisque les côtés décrits sont égaux: or pour avoir les forces centrales, il faut multiplier les nombres des côtés 3 & 2 décrits en même-tems par les vitesses 3 & 2 (95.); donc les forces centrales seront entr'elles comme les produits 9 & 4 qui sont les quarrés des vitesses.

97. 2°. *Si les circonférences décrites sont inégales, les forces centrales sont entr'elles comme les quarrés des vitesses divisés par les diametres.* Car si les circonférences décrites étoient égales, les forces centrales seroient entr'elles com- les quarrés des vitesses 3 & 2 (96). Supposons que la circonférence décrite par le corps Z est cinq fois plus grande, les côtés en seront cinq fois plus grands; donc le corps Z avec la même vitesse en décrira en même-tems un nombre cinq fois moindre; par conséquent la force centrale sera aussi cinq fois moindre, puisque le nombre de fois qu'elle aura agi, est cinq fois moindre; donc il faudra diviser le quarré 4 de la vitesse 2 par 5: pareillement si la circonférence décrite par le corps K est deux fois plus grande, il faudra diviser le quarré 9 de sa vitesse 3 par 2; ainsi les forces de ces deux corps sont entr'elles comme les quarrés 9 & 4 des vitesses 3 & 2 divisés par 2 & 5 qui sont en même raison que les diametres. (13. *Géom.*).

98. L'on nomme tems périodiques les tems que les mobiles K, Z emploient à décrire leurs circonférences.

99. 3°. *Si les vitesses* V, *v des mobiles* K, Z *sont entr'elles réciproquement comme les racines quarrées des diametres* D, *d*, *c'est-à-dire, si* $V . v :: \sqrt{d} . \sqrt{D}$, *les quarrés des tems périodiques* T, *t sont entr'eux comme les cubes des diametres, c'est-à-dire, que* $T^2 . t^2 :: D^3 . d^3$.

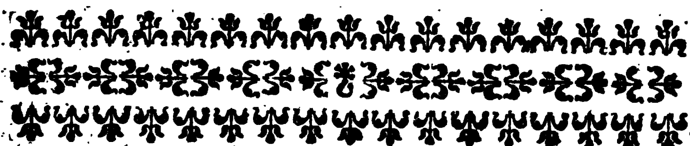
Nous avons vu (15) que les tems des mouvemens T, *t* sont entr'eux en raison composée des espaces parcourus E, *e* & des vitesses V, *v* prises en raison inverse, c'est-à-dire, $T . t :: E \times v . e \times V$. Supposons que les espaces ou les circonférences décrites ou les diametres qui les répréfentent sont E & *e*; suivant cette proportion nous aurons

$T^2 . t^2 :: E^2 \times v^2 . e^2 \times V^2$ (24. *Arith.*) ; or on suppose que $V . v :: \sqrt{e} . \sqrt{E}$; donc $V^2 . v^2 :: e . E$ (24. *Arith.*) ; si dans la proportion $T^2 . t^2 :: E^2 \times v^2 . e^2 \times V^2$ au lieu des quarrés v^2, V^2 on met les grandeurs E, *e* qui sont en même raison, nous aurons $T^2 . t^2 :: E^3 . e^3$ (14. *Arith.*), c'est-à-dire, que les quarrés des tems périodiques sont entr'eux comme les cubes des circonférences, ou bien comme les cubes des diametres D, *d* (13. *Géom.*)

En nombres, supposons que la circonfér. *e* décrite par le corps Z est quadruple de E qui est celle que décrit le corps K, les vitesses *v*, V des corps Z, K seront suivant l'hypothèse comme 1 & 2, c'est-à-dire, réciproquement comme les racines quarrées des circonfer. 4 & 1 ou des diametres *d*, D. Cela posé, le corps K avec une vitesse double parcourra huit côtés sur sa circonf. tandis que le corps Z en parcourra 1 sur la sienne, car huit côtés de la circonférence décrite par le corps K sont égaux à deux côtés de la circonférence décrite par le corps Z ; donc lorsque le corps K aura achevé une révolution, le corps Z n'aura parcouru que la huitiéme partie de sa circonférence ; le tems périodique du corps Z est donc huit fois plus long que celui du corps K ; ces tems sont donc entr'eux comme 8 & 1, & leurs quarrés comme 64 & 1 : or les circonférences étant entr'elles comme 4 & 1, les diametres sont aussi entr'eux comme 4 & 1, & leurs cubes comme 64 & 1 ; donc les quarrés des tems périodiques des corps Z, K sont entr'eux comme les cubes des diametres.

100. *Remarque.* Nous avons vû que si un corps tourne uniformément sur la circonférence d'un cercle, le rayon vecteur décrit en tems égaux des aires égales, & cela parce que la force centrale dirige constamment son action au centre du cercle : Or la proposition est vraie non-seulement lorsqu'un corps décrit une circonférence de cercle ou un polygone régulier, mais aussi lorsqu'il décrit un polygone irrégulier ou une courbe, pourvu que la force centrale dirige toujours son action vers un même point que l'on peut regarder comme le centre de cette force.

Supposons que la vitesse avec laquelle le corps K est poussé suivant ABG [*Fig.* 18.] est exprimée par BG, & que ce corps étant arrivé en B, la force centrale qui dirige son action au centre C le détourne sur BD qui est la diagonale du parallelogramme GH, le corps la décrira dans le tems que par sa vitesse suivant ABG il auroit décrit BG (64); il faut prolonger BD en E; en sorte que DE=DB; supposons que le corps étant arrivé en D soit détonrné sur la ligne DF diagonale du parallelogramme OE, il la décrira en même-tems que par sa vitesse suivant BDE, il seroit allé en E. Cela posé dans le tems que le corps a parcouru les côtés BD, DF du polygone, le rayon vecteur a décrit les triangles BCD, DCF : or 1°. les tems par BD, DF sont égaux, puisque le corps décrit BD dans le tems qu'il auroit parcouru BG, & que d'ailleurs il parcourt DF dans le tems qu'il auroit parcouru DE ou dans le tems qu'il a parcouru BD, car DE=BD. 2°. Les triangles BCD, DCF sont égaux; il faut mener la ligne CE; le triangle BCD est égal au triangle DCE, car ces triangles ont leurs bases BD, DE égales, ils ont aussi même hauteur, parce qu'ils ont leur sommet au point C, & que d'ailleurs leurs bases sont sur la même ligne droite BE : or le triangle DCE est égal au triangle DCF, car ces triangles ont la même base DC, ils ont aussi la même hauteur puisqu'ils sont compris entre les paralleles DC, EF (36. *Geom.*); donc le triangle BCD est égal au triangle DCF : on prouvera de même pour un plus grand nombre de triangles décrits par le rayon vecteur qu'ils sont égaux & parcourus en même-tems; ainsi les aires décrites par ce rayon, en tems égaux sont égales, pourvu que la force centrale pousse le corps toujours vers un même point C; & parce que le polygone ABDF peut répréfenter tous les polygones irréguliers quel qu'en soit le nombre de côtés, quand même il y en auroit une infinité, comme dans une ligne courbe, il s'ensuit que les aires que le rayon vecteur décrit en même-tems que le corps trace la courbe, sont égaux lorsqu'il sont décrits en tems égaux, si la force centrale pousse le corps vers un même point C.



LIVRE SECOND.

Du Mouvement des corps pesans.

DANS le Livre précédent nous avons considéré les propriétés les plus générales du Mouvement, en tant qu'elles sont indépendantes des qualités sensibles qui affectent les corps ou les modifient; or les corps ont de telles qualités, & elles ont beaucoup de part aux effets: de ce nombre sont la pésanteur, la mollesse, la dureté, l'élasticité, la fluidité, &c.

Nous commençons par la pésanteur qui est la plus universelle de toutes. Ce Livre sera divisé en quatre Chapitres; dans le premier nous considérerons les propriétés les plus générales des corps pesans; dans le second, le mouvement des corps jettés suivant la direction verticale ou perpendiculaire à l'horizon; dans le troisiéme, des corps jettés suivant toute autre direction differente de la verticale; dans le quatriéme, des corps pesans mûs sur des plans inclinés.

CHAPITRE I,

Des propriétés les plus générales des corps pesans.

1. LE mot de *pesanteur* ou *de gravité* peut avoir trois significations différentes. 1°. Il peut signifier l'effort ou la tendence que les corps terrestres ont à descendre, & à s'approcher du centre de la terre. 2°. Il peut signifier la cause qui produit cet effort; c'est dans ce sens que l'on dit

que la pesanteur agit à des distances dont nous ne connoissons point les bornes. 3°. Le mot de *pesanteur* signifie souvent la mesure ou quantité de l'effort ou tendence que les corps ont à descendre, on la nomme plus ordinairement *poids*; c'est dans ce sens que l'on dit que le plomb pese plus que le liege. Les sentimens sont partagés sur la cause de la pesanteur; cette diversité de sentimens n'empêche pas néanmoins que l'on ne convienne assez généralement de ses effets.

2. Galilée est le premier qui ait raisonné juste de la pesanteur, à l'aide des expériences; il mit des corps polis sur des plans differemment inclinés, qu'il laissa glisser ou rouler; & après avoir réiteré l'expérience plus de 100 fois pour chaque inclinaison, il trouva toujours qu'un corps parcouroit sur un même plan, des espaces qui étoient entr'eux comme les quarrés des tems; en sorte que si dans la premiere partie du tems le mobile avoit parcouru un pied après qu'il s'en étoit écoulé trois parties, il avoit parcouru 9 pieds; or 1 & 9 sont les quarrés des tems 1 & 3.

3. Toutes ces expériences parfaitement d'accord entre elles, conduisirent Galilée à conclure que la pesanteur est une force constante. Cette hypothèse a été trouvée conforme aux phenomenes, & tous les auteurs qui après Galilée ont traité de la pesanteur, l'ont suivie.

4. Galilée s'étoit contenté de faire des expériences sur les corps terrestres, elles l'avoient toutes porté à croire que la pesanteur est une force uniforme qui agit également par tout; mais M. Neuton soupçonna dans la suite qu'il pourroit bien se faire que la pesanteur diminuât en allant du centre vers la circonférence, & que la force qui retient la Lune sur son orbite, ne fût pas différente de la pesanteur, considérant ainsi la Lune comme une espece de corps terrestre qui tourne autour de la terre : on peut voir dans les principes sur quoi il fonde sa conjecture, & de quelle maniere il la prouve.

5. Quoique l'on suppose avec M. Neuton que la force de la pesanteur diminue à mesure que l'on s'éloigne de la

terre ; cependant comme cette diminution ne peut devenir sensible qu'à de très-grandes distances, toutes plus grandes que celles auxquelles les machines les plus fortes peuvent porter les corps pesans, on peut toujours considérer la pesanteur comme une force constante, lorsqu'il s'agit des corps qui sont à la surface de la terre.

6. Lorsqu'on dit que la pesanteur auprès de la terre est une force constante, on ne prétend pas dire qu'elle est égale dans tous les lieux de sa surface ; car on sçait, par exemple, qu'elle est moindre à l'équateur qu'au cercle polaire, ainsi qu'on aura occasion de remarquer dans la suite : mais on entend que si un corps monte ou descend en un même lieu de la terre, la pesanteur fait sur ce corps le même effort à chaque instant de la montée & de la descente.

De la direction des corps pesans.

7. *Plusieurs raisons prouvent que les corps pesans tendent au centre de la terre, ou à des points fort proches de ce centre.*

1°. Si on tient un poids suspendu à un fil, il le bande, & le fil bandé se met dans une situation verticale ou perpendiculaire à l'horizon, c'est-à-dire, à la portion de la surface de la terre à laquelle il répond : or si la terre est un globe comme on croit ordinairement, le fil prolongé passeroit par le centre du globe ; car c'est une propriété de la Sphere, que ses rayons ou diametres soient perpendiculaires à sa surface ; de même que les perpendiculaires à sa surface se confondent avec ses rayons ; donc les corps pesans dont les directions sont indiquées par des perpendiculaires à la surface de la terre tendent au centre. 2°. L'Astronomie fournit une preuve du même sujet. Supposons qu'un voyageur parcoure sur un méridien terrestre deux espaces inégaux, à compter du lieu de départ ; l'observation fait découvrir que les arcs célestes compris entre les verticales qui passent par le lieu de départ & les deux stations sont proportionnels aux espaces terrestres compris aussi entre le lieu de départ & les deux stations ; en sorte que si l'espace compris entre le point de départ & la premiere sta-

tion n'eſt que la moitié de l'eſpace compris entre ce même point & la ſeconde ſtation, de même l'arc céleſte compris entre la premiere & la ſeconde verticale n'eſt que la moitié de l'arc compris entre cette premiere verticale & la derniere, du moins ſenſiblement; puiſque pour trouver quelque différence entre ces deux rapports, il faut mettre en uſage les opérations de l'aſtronomie les plus ſubtiles & les plus délicates : cela poſé ſi la terre étoit plus convexe en un endroit qu'en l'autre, les arcs céleſtes compris entre les verticales du lieu de départ & des deux ſtations, ne ſeroient point proportionnels aux eſpaces terreſtres auxquels ils répondent; mais l'arc qui répondroit à la partie la moins convexe ſeroit moindre à proportion, puiſque ſi cette partie étoit plate, l'arc céleſte qui lui répondroit n'auroit aucune grandeur apparente, conformément aux regles de l'optique : il faut donc conclure que la convexité de la terre eſt ſenſiblement égale aux différens endroits de ſa ſurface : par conſéquent les verticales ou perpendiculaires à cette convexité concourent au centre ou à des points qui en ſont fort proches. Ce ſujet & la queſtion de la figure de la terre, enſemble pluſieurs conſéquences que l'on peut tirer de ſa ſphéricité, ſont décrites plus au long dans les principes.

Du centre de Gravité.

8. On définit le centre de gravité *un point* par lequel une figure peſante étant librement ſuſpendue, toutes les parties ſe contrebalancent également, & ſont en équilibre, quelque poſition qu'elles aient par rapport à la ſurface & au centre de la terre.

9. *Dans tous les corps il y a un point par lequel ſi on les ſuſpend leurs parties ſont en équilibre dans une certaine ſituation.* Car on peut toujours imaginer un plan vertical qui diviſe le corps peſant ſuivant ſa longueur, de maniere que la partie qui eſt à la droite du plan ne l'emporte point ſur celle qui eſt à la gauche : ſi l'on applique deux puiſſances dont les directions étant couchées ſur ce plan, ſoient en

sens contraire de la pesanteur, elles soutiendront le corps de maniere qu'une partie ne fera point pencher l'autre : or ces deux puissances peuvent se composer en une force qui fera autant pour soutenir le corps que les deux puissances ensemble (*Liv. I. 77.*) : c'est pourquoi si on suspend le corps par le point où la direction de cette force le rencontre, tout demeurera encore en repos.

10. *Si les directions de la pesanteur étoient paralleles, les corps pesans auroient un centre de gravité au sens de la définition.*

Car quelque position que l'on donne au corps, les directions des parties pesantes sont toujours semblablement situées tant entr'elles qu'à l'égard de la puissance qui soutient le corps, puisque ces directions sont paralleles ; c'est pourquoi si ces mêmes parties sont en équilibre, le corps étant dans une certaine situation, elles y seront encore si le corps vient à prendre une autre position.

11. Mais si les directions des parties pesantes concourent en quelque point, comme au centre de la terre, en rigueur les corps n'ont point de centre de gravité proprement dit, mais le point par lequel il faut les suspendre pour que les parties soient en équilibre, change à toutes les positions que l'on leur donne ; car les pesanteurs particulieres des parties d'un corps se composent pour lors en une force dont la direction change selon la position que l'on donne au corps ; de-là vient que la direction de la puissance qui résiste à cette force doit changer aussi, comme on a montré dans les principes. Cependant le centre de la terre est à une si grande distance de la surface, que les directions des parties d'un même corps lorsqu'il n'est pas d'une grandeur excessive, sont sensiblement paralleles : c'est dans cette supposition que les Géometres donnent des regles pour trouver le centre de gravité des figures pesantes.

PROBLÊME.

12. *Trouver méchaniquement le centre de gravité d'un corps que l'on remue facilement.*

1°. Il faut le poser sur une table, & faire en sorte qu'il en excede le bord jusqu'à ce que la partie qui déborde soit sur le point d'entraîner l'autre ; le corps étant dans cette situation il faut tirer le long du bord de la table sur la surface qui la touche une ligne qui distingue la partie qui est appuyée sur la table, de celle qui en sort : le corps touchant toujours la table par la même surface, il faut le tourner, & faire en sorte qu'il en excede le bord jusqu'à ce que la partie qui sort, soit sur le point d'entraîner celle qui est appuiée sur la table ; il faut tirer une seconde ligne qui distingue ces deux parties, & le point ou cette seconde ligne coupera la premiere qu'on a tirée est un des points de la direction du centre de gravité du corps.

Propriétés du centre de gravité.

13. Puisqu'un corps qui est suspendu par son centre de gravité a toutes ses parties en repos & en équilibre autour de ce point, il s'ensuit que si le centre de gravité d'un corps est appuyé, le corps est en repos : mais pour que ce centre soit appuyé il faut que la direction de la résistance passe aussi par ce centre, & qu'elle soit directement opposée à la pesanteur, sans quoi le corps n'est point en repos.

14. D'où il suit 1°. que si on pose un corps sur un plan horisontal, il y sera en repos ; car la ligne de direction du centre de gravité est perpendiculaire au plan : or ce plan résiste suivant la même perpendiculaire ; (*Liv. I.* 74.) donc le centre de gravité est soutenu, & le corps est en repos.

15. Mais si la ligne de direction est oblique au plan, comme lorsque le corps est sur un plan incliné, il doit glisser ou rouler. Car un plan ne résiste que suivant la perpendiculaire (*Liv. I.* 74, 75.) : ainsi cette résistance n'est point directement opposée à la direction du centre de gravité ; la pesanteur du corps est donc décomposée en deux efforts, l'un perpendiculaire au plan, l'autre parallele ; par le pre-

mier de ces efforts, le corps presse le plan ; mais l'effort parallele le fait avancer sur le plan.

16. 2°. Un mur peut être solidement bâti quoiqu'il soit incliné, pourvu que les pierres étant bien liées, la direction du centre de gravité du mur ou du moins de tout l'édifice ne sorte point hors de la base : c'est pour cette raison qu'un des murs de la tour de Boulogne en Italie, haute de 130 pieds, ne menace point de ruine, quoiqu'au rapport du Pere Casat, il soit incliné de 9 pieds en dehors : or suivant le calcul de cet auteur, il résulte que la ligne de direction du centre de gravité du mur sort de la base. Le même auteur rapporte encore que la Tour de Pise haute de 78 coudées, est penchée de $7\frac{1}{3}$ ou de $6\frac{1}{2}$ coudées.

17. 3°. Lorsqu'un homme marche, il porte alternativement son corps sur le côté droit & sur le côté gauche ; s'il monte, il le porte un peu en avant comme aussi lorsqu'il a un fardeau sur les épaules, ou qu'étant assis il veut se lever : mais s'il descend, il penche un peu le corps en arriere. Lorsqu'il fait tous ces mouvemens par une méchanique naturelle, & sans y penser, c'est pour soutenir le centre de gravité, pour le mouvoir plus facilement, ou pour empêcher qu'il n'imprime au corps une trop grande vitesse.

Du rapport des poids.

18. Le volume d'un corps est l'espace qu'il occupe en longueur, largeur & profondeur, lequel se mesure par les regles de la Géométrie. La masse est la quantité de matiere que le volume contient ; si les corps n'étoient pas percés d'un nombre innombrable de pores, il ne seroit pas nécessaire de distinguer le volume de la masse ; mais les uns en ont plus, les autres moins : de-là vient que deux volumes égaux ont des masses différentes : ainsi un pied cube de plomb contient plus de matiere qu'un pied cube de liege, ce qui paroît sensiblement en mettant les deux corps sous la presse, car elle réduit le liege à un petit volume, tandis que le plomb ne perd presque rien du sien.

L'expérience

L'expérience montre que les corps de différentes matieres pesent inégalement ; d'où est-ce que cette inégalité de poids procede ? Nous allons rapporter quelques expériences qui peuvent fournir des lumieres sur la question proposée.

19. Galilée a observé que les corps, tant ceux qu'on nomme legers, que ceux qu'on appelle pesans, commencent à descendre dans l'air avec la même vitesse : par exemple, si on laisse tomber deux balles, l'une de plomb, l'autre de Liege, elles vont ensemble presque l'espace de deux pieds ; après quoi la bale de plomb devance de beaucoup celle de liege. M. Mariotte a fait des expériences semblables : on laissa tomber ensemble de la même hauteur, qui étoit de 80 pieds, une boule de mail, & un boulet de canon de la même grosseur. Ils descendirent jusqu'à 25 pieds également vîte ; le boulet étant à 50 pieds passa la boule de mail d'environ deux pieds, & au bas de la chute, de plus de quatre pieds.

20. M. Newton fit deux Pendules de onze pieds de long, dont les poids étoient deux boëtes rondes, égales & de même bois ; il mit dans l'une un morceau d'or, & dans l'autre successivement un poids égal de bois, d'eau, de froment, de sable, &c. toutes matieres moins pesantes que l'or ; il éloigna également les deux pendules du repos, & il trouva qu'ils faisoient leurs vibrations en même-tems & d'égale étendue, allant & revenant ensemble pendant un tems considérable.

21. Les expériences de Galilée & de M. Mariotte montrent que la pesanteur imprime d'abord aux corps, quelque soit leur poids, la même vitesse, puisqu'ils vont ensemble pendant quelque tems, & que si ensuite le plus pesant devance, cela procede de ce qu'il trouve dans l'air une résistance d'autant moindre, qu'il est plus pesant : ce qui montre que si les deux corps trouvoient une égale résistance dans l'air, ils tomberoient également vîte. C'est-là ce que prouve l'expérience de M. Newton ; car les deux boëtes dont il se servit auroient fait leurs vibrations d'égale éten-

due, & ensemble, si elles avoient été vuides, puisqu'elles étoient parfaitement égales; or les matieres qu'il mit dedans ne troublerent point non plus l'égalité des vibrations, quoique fort inégales en volume, comme il paroît par l'expérience même: d'ailleurs il est visible que tout l'usage des boëtes consistoit à faire en sorte que ces différentes matieres trouvassent dans l'air la même résistance; doù il suit que si elles étoient mûes seules par la pesanteur dans un milieu sans résistance, ou bien qui résistât également à toutes, elles descendroient avec la même vitesse.

PROPOSITION I.

22. *Les pesanteurs des corps sont entr'elles comme les masses.*

Dém. Suivant les expériences précédentes tous les corps tomberoient également vîte sans la résistance de l'air, & acquerroient en tems égaux des degrés égaux de vitesse (19. 20); donc les quantités de mouvement seroient entre elles comme les masses (*Liv. I.* 30.): or deux forces constantes sont entr'elles comme les quantités de mouvement qu'elles produisent en même-tems (*Liv. I.* 59); d'ailleurs les pesanteurs de deux corps sont des forces constantes (3. 5); donc elles sont entr'elles comme les quantités de mouvement; & par conséquent entr'elles comme les masses.

23. *Coroll.* 1°. *Les poids de même matiere sont entr'eux comme les volumes.* Car les pesanteurs sont entr'elles comme les masses: or les masses d'une même matiere sont entre elles comme les volumes; un volume double contient deux fois davantage de la même matiere. Donc, &c.

24. On distingue la *pesanteur absolue* d'un corps de *sa pesanteur specifique. La pesanteur absolue est la quantité de son poids, quelque soit son volume.* On détermine ordinairement la pesanteur absolue d'un corps en livres & en parties de la livre. *La pesanteur spécifique d'un corps est la quantité de son poids comparée à celle d'un autre corps de même volume:* lors donc que les volumes sont égaux, les

pesanteurs spécifiques ne different point des pesanteurs absolues ; si l'un des corps pese deux fois davantage en volume égal, les pesanteurs spécifiques sont entr'elles comme 2 & 1 ; les pesanteurs absolues sont aussi entr'elles comme 2 & 1, si l'un pese deux livres, l'autre en pese une : ainsi lorsque les volumes sont égaux, les pesanteurs spécifiques ne différent point des pesanteurs absolues, ou elles sont dans le même rapport.

25. 2°. *Si deux corps de différentes matieres pesent également, leurs pesanteurs spécifiques sont entr'elles réciproquement comme les volumes des deux poids égaux.* Que l'or en pareil volume pese deux fois davantage que l'argent, sa pesanteur spécifique sera double de celle de l'argent, & un volume d'argent égal au volume d'or pesera deux fois moins; donc pour que le volume d'argent pese autant que le volume d'or, il faut le doubler : ainsi les volumes des 2 poids égaux, l'un d'or, l'autre d'argent, sont entr'eux comme 1 & 2, & les pesanteurs spécifiques comme 2 & 1 : c'est-à-dire, qu'elles sont entr'elles réciproquement comme les volumes 1 & 2 des deux poids égaux.

CHAPITRE II.

Des Corps jettés suivant la direction verticale ou perpendiculaire à l'horison.

26. NOus supposerons dans la suite avec Galilée que la pesanteur est une force constante, c'est-à-dire, une force qui en un même endroit de la terre donne aux corps qui tombent librement des degrés égaux de vitesse : mais qu'elle leur ôte, lorsqu'ils montent des dégrés égaux à ceux qu'elle leur auroit communiqués en descendant : ainsi le mouvement d'un corps qui obéit aux impressions de la pesanteur, est ou accéléré, ou retardé. Nous supposerons encore que les corps sont mûs dans un milieu non résistant, ou plutot nous ferons abstraction de sa résistance.

Du mouvement accéléré de la pesanteur.

27. *Un corps pesant qui descend librement est mû d'un mouvement uniformément accéléré.* Car la pesanteur communique à chaque instant de la descente un égal degré de vitesse (*Liv. I.* 45) : or les degrés une fois communiqués demeurent au mobile, puisqu'aucun obstacle ne les lui ote ; les degrés de vitesse communiqués sont donc en même nombre que les instans qui se sont écoulés (*Liv. I.* 52) ; donc la vitesse du mobile a été uniformément accélérée. D'où il suit que les degrés de vitesse qu'acquiert un corps qui tombe librement, augmentent comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, donc &c.

PROPOSITION II.

28. *L'espace parcouru par un corps qui tombe librement est représenté par un triangle rectangle* ABC, *dont la hauteur* AB *exprime le tems, & la base* BC *la vitesse acquise à la fin de ce tems* [Fig. 7].

La preuve est la même que celle de l'art. 57, Liv. I, on va néanmoins la proposer sous un point de vue un peu différent.

Concevons le triangle ABC divisé en ses élémens paralleles à la base BC, il y aura une infinité de trapezes d'une hauteur infiniment petite, qui pris de suite ne different entr'eux que d'un triangle qui est infiniment petit par rapport à l'élément dont il est partie ; l'on peut donc considérer ces trapezes comme autant de rectangles qui ont pour hauteur une partie infiniment petite du coté AB, & pour base la parallele correspondante à cette partie : or les parties du coté AB étant égales peuvent représenter les parties égales du tems, & les paralleles qui vont en augmentant depuis le sommet jusqu'à la base, comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. peuvent représenter les vitesses que le mobile a acquises à la fin de chaque tems ; ainsi la parallele DE représentera la vitesse acquise après le tems AD ; la parallele GH, la vitesse acquise après le tems AG,

de même que BC représente la vitesse acquise après le tems AB ; d'ailleurs comme les instans A, D, G, B, &c sont infiniment petits, on peut considérer la petite augmentation de vitesse que le corps reçoit dans chacun de ces instans comme étant produite sans succession, & par conséquent la vitesse avec laquelle le corps est mû dans chaque instant particulier, comme uniforme pendant cet instant. Cela posé, chaque trapeze ou petit rectangle représente l'espace que le mobile a parcouru pendant l'instant correspondant à la hauteur du petit rectangle, la vitesse étant exprimée par la base du même rectangle (*Liv. I.* 14); donc la somme des trapezes ou rectangles représente la somme des espaces parcourus pendant la somme de tous les instans du tems AB ; donc le triangle ABC représente l'espace que le mobile a parcouru librement pendant le tems AB de l'accélération.

29. *Coroll.* 1°. *Si un corps est mû uniformément avec la vitesse qu'il a acquise pendant le tems de l'accélération, il parcourt dans un tems égal, un espace double de celui qu'il a parcouru en l'acquérant.* Car l'espace que le mobile parcourt pendant le tems qu'il est accéléré par la pesanteur, est représenté par un triangle rectangle ; mais l'espace parcouru uniformément avec la vitesse acquise est représenté par un rectangle (*Liv. I.* 14) ; d'ailleurs le rectangle & le triangle ont même base & même hauteur ; car leur hauteur représente les tems de l'accélération & du mouvement uniforme supposés égaux ; leur base représente la vitesse acquise ; donc le rectangle est double du triangle (34. *Géom.*); donc l'espace, &c.

30. D'où il suit que dans la moitié du tems AB, le mobile parcourroit uniformément avec la vitesse acquise BC l'espace représenté par le triangle ABC.

31. 2°. *Les espaces qu'un corps parcourt en tems égaux, lorsqu'il tombe librement sont entr'eux comme les nombres impairs* 1, 3, 5, 7, &c. Supposons que la hauteur AB [*Fig.* 19.] qui représente les tems, est divisée en un certain nombre de parties égales, par exemple en 4, & par les

points de division, soient menées GI, FL, EM paralleles à la base BC, l'on aura trois trapezes & le petit triangle AGI qui ont tous des hauteurs égales & dont les bases prises de suite se surpassent d'une partie égale à GI; ainsi le trapeze GL contiendra trois triangles égaux à AGI, le trapeze FM en contiendra 5, & le trapeze EC, 7; le triangle AGI & les trapezes qui suivent sont donc entr'eux comme 1, 3, 5, 7, &c. or ces parties du triangle total ABC représentent les espaces que le mobile a parcouru pendant les tems AG, GF, FE, EB, &c. ce qui est évident par ce qui vient d'être dit dans la preuve (28). Donc les espaces parcourus en tems égaux sont comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c.

En nombres. Supposons qu'un corps qui tombe librement parcoure dans la premiere partie du tems une toise; pendant la seconde avec la vitesse acquise durant la premiere, il parcourt deux toises (29. 30), de plus l'augmentation de vitesse qu'il reçoit dans cette seconde partie du tems lui fait parcourir une toise de même que dans la premiere; donc dans le second tems le mobile parcourt trois toises: pendant la troisiéme partie du tems la vitesse acquise durant les deux premieres fait parcourir au mobile 4 toises, & la vitesse qu'il acquiert durant cette troisiéme partie du tems lui fait parcourir une toise; donc le corps parcourt en tout cinq toises; la vitesse acquise durant les trois premieres parties du tems lui fait parcourir pendant la quatriéme six toises, & la vitesse qu'il acquiert successivement lui fait parcourir une toise, il parcourt donc sept toises pendant le quatriéme tems; donc les espaces parcourus sont entr'eux comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c.

PROPOSITION III.

32. *Les espaces parcourus par un corps qui tombe, à compter du repos, c'est-à-dire, du point d'où il commence à tomber, sont entr'eux comme les quarrés des tems employés à les parcourir.*

Dém. Le triangle ABC [*Fig.* 7] représente l'espace

parcouru dans le tems AB depuis le premier instant de la descente (28). Cela posé, si par quelque point G de la hauteur AB on mene GH parallele à BC, le triangle AGH représentera l'espace parcouru pendant le tems AG; ce qui est évident par ce qui a été dit dans la preuve de l'article 31 : ainsi les espaces parcourus pendant les tems AB, AG sont entr'eux comme les triangles ABC, AGH; or ces triangles sont comme les quarrés des cotés AB, AG (19. *Géom.*); donc les espaces parcourus pendant les tems AB, AG sont entr'eux comme les quarrés des mêmes cotés, & par conséquent entr'eux comme les quarrés des tems représentés par ces mêmes cotés.

En nombres. Supposons qu'un corps qui tombe parcoure une toise dans la premiere partie du tems, dans la seconde il en parcourt trois (31), dans la troisiéme cinq, dans la quatriéme sept, &c. ainsi les espaces après le premier tems, après les deux premiers, après les trois premiers, après les quatre premiers, &c. sont entr'eux comme 1. 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, &c. c'est-à-dire, comme 1. 4. 9. 16. &c. qui sont les quarrés des tems.

33. *Les espaces parcourus après deux tems sont encore entr'eux comme les quarrés des vitesses acquises pendant ces tems*. Car les vitesses acquises dans deux tems sont dans la raison des tems (27) & les quarrés des vitesses dans la raison des quarrés des tems (24. *Arith.*) : or les espaces parcourus dans deux tems à compter depuis le repos sont entr'eux comme les quarrés de ces tems (32); donc ils sont aussi comme les quarrés des vitesses acquises.

34. D'où il suit que les tems & les vitesses acquises durant ces tems sont dans la raison des racines quarrées des espaces parcourus durant ces mêmes tems (24. *Arith.*).

35. Supposons que deux corps parcourent d'un mouvement uniforme deux espaces, avec les vitesses qu'ils ont acquises par deux hauteurs différentes; *Je dis que si les espaces parcourus sont comme les racines quarrées de ces hauteurs, ils sont parcourus en même-tems*. Car les vitesses acquises par deux hauteurs sont entr'elles comme les racines

quarrées de ces hauteurs (34); or on ſuppoſe que les eſpaces parcourus ſont comme les racines quarrées des hauteurs qui ont donné les viteſſes avec leſquelles ils ſont parcourus; donc ils ſont comme les viteſſes acquiſes, ou comme les viteſſes avec leſquelles les mobiles ſont mûs uniformément; donc ces eſpaces ſont parcourus en même-tems (*Liv. I.* 5).

Du Mouvement retardé de la peſanteur.

36. *Un corps qui eſt pouſſé verticalement de bas en haut monte d'un mouvement uniformément retardé.* Car la peſanteur réſiſte directement à un corps qui monte ſuivant la direction verticale ou perpendiculaire à l'horiſon (7); de plus comme force conſtante (3. 5.) elle ôte à chaque inſtant de la montée un degré de viteſſe; donc les degrés de viteſſe perdue augmentent en même raiſon que les tems; donc un corps qui monte verticalement eſt mû d'un mouvement uniformément retardé.

37. D'où il ſuit que ſi un corps eſt repouſſé de bas en haut avec la viteſſe qu'il a acquiſe en tombant d'une certaine hauteur, il ſera autant de tems à la perdre qu'il en a été à l'acquérir. Ce qui eſt évident; car la peſanteur agit ſur le corps avec autant de force lorſqu'il monte que lorſqu'il deſcend.

PROPOSITION IV.

38. *Un corps qui eſt pouſſé de bas en haut avec la viteſſe qu'il a acquiſe en tombant d'une certaine hauteur, la perd entierement en remontant à cette hauteur.*

Dém. Le tems de la montée eſt égal au tems de la deſcente (37). Cela poſé, ſi l'on compte dans un ordre rétrograde les inſtans de la montée, l'on verra qu'aux inſtans correſpondans de la montée & de la deſcente, le mobile a la même viteſſe. Ainſi après le premier inſtant de la deſcente il a un degré de viteſſe, avant le dernier inſtant de la montée il lui reſte auſſi un degré de viteſſe; après les 2 premiers inſtans de la deſcente, il a acquis 2 degrés de viteſſe, & avant

les deux derniers instans de la montée, il lui reste deux degrés de vitesse : & de même pour les autres instans également éloignés du premier instant de la descente & du dernier de la montée : or lorsque les vitesses sont égales & les tems aussi, les espaces parcourus sont égaux; donc les espaces parcourus aux instans correspondans de la montée & de la descente sont égaux; donc tout l'espace parcouru dans la montée est égal à l'espace parcouru dans la descente, puisque les tems sont égaux; donc le corps en perdant la vitesse acquise remonte à la hauteur d'où il est tombé. D'où il suit que si un corps étant poussé en haut avec une certaine vitesse la perd en montant à une certaine hauteur, cette vitesse est égale à celle qu'il acquerroit en descendant de cette hauteur.

39. *Corollaire.* L'espace ou la hauteur qu'un corps parcourt en montant contre sa direction naturelle, est exprimé par un triangle rectangle dont le coté vertical représente le tems, & la base la vitesse avec laquelle il a commencé à monter. Car si le corps descendoit, il seroit autant de tems à acquérir cette vitesse qu'il en a été à la perdre, & avec elle il parcourroit en montant le même espace que la premiere fois; or avec cette même vitesse il remonteroit à la hauteur d'où il seroit descendu; donc toutes ces hauteurs ne different point entr'elles; mais celle que le corps parcourroit en descendant est exprimée par un triangle rectangle dont le coté vertical représente le tems, & la base la vitesse acquise à la fin de ce tems; donc l'espace qu'un corps parcourt en montant est aussi exprimé par un triangle réctangle dont la hauteur représente le tems de la montée, & la base la vitesse avec laquelle il commence à monter.

De-là, suivent les mêmes Corollaires que nous avons déduits pour le mouvement uniformément accéléré.

40. Avec les Propositions précédentes on peut composer des formules qui représentent les circonstances du mouvement uniformément accéléré & retardé. Soient nommées V, v, les vitesses que deux mobiles acquierent ou

qu'un même mobile acquiert en tombant de deux hauteurs différentes ; T, t les tems des mouvemens ; E, e les espaces parcourus en tombant : nous aurons 1°. $V.v :: T.t$ (27); donc $Vt = vT$ (12. *Arith.*) 2°. $E.e :: T^2.t^2$, & encore $E.e :: V^2.v^2$ (32. 33); donc $Et^2 = eT^2$, ou $Ev^2 = eV^2$. 3°. Puisque $V.v :: T.t$ & que $T.t :: T.t$; donc $VT.vt :: T^2.t^2$ (21. *Arith.*); donc $E.e :: VT.vt$; donc $Evt = eVT$.

On peut appliquer ces formules, selon l'occurrence, aux cas particuliers qui se présenteront, observant dans les proportions qu'on en déduira, de faire en sorte qu'en prenant les produits des extrêmes & des moyens, l'on puisse retrouver l'égalité ou la formule qui a donné la proportion.

Dans le mouvement accéléré ou retardé d'un corps pesant, de même que dans le mouvement uniforme, on peut considérer trois choses, le tems, l'espace parcouru, & la vitesse : une de ces trois choses étant connue, on peut trouver les autres. On peut déterminer ces quantités en nombres ou géométriquement ; nous nous contenterons ici de résoudre les problêmes en nombres ; & nous remarquerons préalablement que des expériences faites avec soin ont fait connoître à M. Huygens qu'un corps pesant qui tombe librement, parcourt dans la premiere seconde de sa chute 15 pieds.

PROBLÊME I.

41. *La hauteur d'où un corps est tombé librement étant connue, trouver le tems de la descente & la vitesse acquise.*

1°. On suppose qu'un corps est tombé de 960 pieds de haut. 1°. Pour trouver le tems de la descente, il faut faire la proportion $15.960 :: 1\times1.xx$; c'est-à-dire, l'espace parcouru dans une seconde est à l'espace parcouru durant le tems cherché, comme le quarré d'une seconde qui est 1×1 est à xx, quarré du tems cherché (32); donc $15xx = 960\times1$; donc $x^2 = \frac{960}{15}$ & $x = \sqrt{\frac{960}{15}} = 8$; ainsi le mo-

bile a employé huit secondes à tomber de la hauteur de 960 pieds.

42. 2°. Pour avoir la vitesse acquise durant les 8 secondes, il faut comparer l'espace que le mobile parcourroit uniformément avec cette vitesse, au tems; or le mobile avec la vitesse acquise parcourroit uniformément dans l'espace de huit secondes le double de 960 pieds, c'est-à-dire, 1920 pieds (29. 30) : c'est pourquoi, si on divise cet espace par le tems 8, on trouvera que sa vitesse est telle qu'il parcourroit uniformément dans une seconde 240 pieds (*Liv.* I. 7).

PROBLÊME II.

43. *Le tems de la descente étant connu, trouver la hauteur d'où le mobile est tombé, & la vitesse acquise.*

On suppose qu'un mobile est descendu pendant huit secondes; on demande 1°. de quelle hauteur il est descendu, 2°. quelle est la vitesse qu'il a acquise. 1°. Pour trouver la hauteur cherchée il faut faire cette proportion $1\times1 . 8\times8 :: 15 . x$, c'est-à-dire, le quarré d'une seconde, qui est 1×1 est à 8×8, qui est le quarré du tems donné comme l'espace de 15 pieds, qui sont parcourus en une seconde est à l'espace cherché (32); donc $x = 15\times8\times8 = 960$ pieds qui sont l'espace que le mobile a parcouru librement en huit secondes. 2°. Si l'on double 960, le produit 1920 pieds est l'espace que le mobile parcourroit uniformément en 8 secondes (29. 30); de sorte que si l'on divise cet espace par le tems 8, le quotient 240 pieds exprime la vitesse du mobile ou l'espace qu'il parcourroit uniformément en une seconde (*Liv.* I. 7).

PROBLÊME III.

44. *La vitesse acquise par une certaine hauteur étant donnée, trouver cette hauteur, & le tems de la descente.*

1°. On supose qu'avec la vitesse acquise le mobile parcourroit uniformément 120 pieds en une seconde. Un corps qui est descendu durant une seconde parcourroit uniformé-

ment avec la vitesse acquise 30 pieds dans cette seconde (29. 30). Cela posé, lorsque les tems sont égaux les vitesses sont entr'elles comme les espaces parcourus 30 & 120 (*Liv. I.* 5), ou comme 3 & 12, ou encore comme 1 & 4 (8. *Arith.*) : or les hauteurs d'où un mobile descend sont entr'elles comme les quarrés des vitesses 1 & 4 (33). Donc 1. 16 : : 15. x, c'est-à-dire, que les quarrés 1 & 16 des vitesses 1 & 4 sont entr'eux comme les espaces parcourus (33); donc $x = \frac{16 \times 15}{1} = 240$: ainsi le corps a parcouru en descendant librement 240 pieds pour acquérir la vitesse par laquelle il parcourroit uniformément 120 pieds en une seconde.

45. 2°. Les tems des descentes étant entr'eux comme les vitesses acquises à la fin de ces tems (27), & ces vitesses comme les espaces que le mobile parcourroit uniformément dans le même tems ou en tems égaux, avec ces mêmes vitesses, c'est-à-dire, comme 30 & 120 (*Liv. I.* 5); il s'ensuit que 30. 120 : : 1. $x = \frac{120 \times 1}{30} = 4$; le tems de la descente par la hauteur de 240 pieds est donc de quatre secondes.

Les Problêmes du mouvement uniformément retardé doivent être résolus par les mêmes principes.

CHAPITRE III.

Des Corps jettés suivant des directions différentes de la verticale.

46. UN corps qui est poussé suivant la verticale, la suit, soit qu'il monte, soit qu'il descende; mais s'il est jetté suivant toute autre ligne, il la quitte aussi-tôt; car il se trouve entre deux déterminations; la pesanteur le pousse suivant la verticale, & la force externe suivant une autre direction : or il résulte de-là un effort composé par lequel

le corps est mû suivant une direction moyenne; & parce que la pesanteur agit sans relâche, il n'est jamais deux instans sur la même; c'est pourquoi le mobile trace une ligne courbe.

De la ligne courbe que les corps jettés décrivent.

47. 1°. Les corps pesans tendent à descendre suivant des lignes qui concourent au centre ou fort près du centre de la terre; elles font donc des angles plus grands les uns que les autres: si l'un de ces angles est d'une minute, l'arc sur la circonférence de la terre, qui le mesure, vaut un peu plus de 900 toises; or la plus grande étendue des jets n'excede pas ordinairement cette portée; on peut donc pour la facilité des calculs, supposer qu'un corps jetté monte ou descend pendant la durée du jet suivant des directions paralleles, sans que cette supposition cause d'erreur sensible dans les résultats.

48. 2°. Nous concevrons que le tems est divisé en parties égales, & que la pesanteur agit sur le mobile une fois seulement au commencement de chacun de ces tems; ensorte néanmoins que par ce seul effort il puisse parcourir dans chacun de ces tems suivant sa direction naturelle, le même espace que la somme des efforts de la pesanteur lui fait effectivement parcourir: dans cette hypothèse le mobile décrira un polygone d'un nombre fini de cotés. Que le corps K soit jetté suivant la direction AX [*Fig.* 20. 21] parallele ou inclinée à l'horison, avec une force capable de lui faire décrire AB dans la 1re partie du tems, par exemple, en une seconde; durant ce tems la pesanteur lui feroit décrire suivant sa direction un espace AL, par exemple, de quinze pieds; donc la force composée des efforts suivant AB, AL lui fera décrire dans une seconde la diagonale AG du parallelogramme BL (64. *Liv. I.*) Il faut prolonger AG en I, en sorte que GI=AG; le mobile étant arrivé au point G parcourroit GI prolongement de AG en une seconde; mais la pesanteur lui feroit parcourir IM de 15 pieds pareillement dans une seconde; donc par la force

composée de l'effort suivant GI & de celui de la pesanteur, il décrira dans une seconde GM, qui est la diagonale d'un parallelogramme qui a pour côté GI & une ligne égale à IM prise sur la direction BG de la pesanteur : le mobile décrira de la même maniere les autres côtés MO, OQ, QR, &c. du polygone. Maintenant si l'on suppose que le tems est divisé en parties infiniment petites, la pesanteur agira coup sur coup, & les côtés AL, IM, ON, &c. des parallelogrammes décrits étant infiniment petits, les diagonales AG, GM, MO, OQ, &c. feront des angles infiniment grands, & composeront une courbe.

49. *Coroll.* 1°. Les côtés AL ou BG, IM, NO des parallelogrammes dont les diagonales AG, GM, MO composent la courbe, sont égaux, puisqu'ils expriment l'action constante de la pesanteur (3. 5).

50. 2°. Si on prolonge les paralleles BG, IM, ON, &c. jusqu'à la direction AX, cette ligne sera divisée en parties égales ; car AG=GI ; donc AB=BC. Pareillement GM=MN ; donc BC=CD=AB (7. *Géom.*) &c.

51. 3°. Suivant l'hypothèse le mobile auroit décrit AB, par l'impulsion suivant AX dans la premiere partie du tems ; donc en des tems égaux au tems par AB, il auroit décrit les autres parties BC, CD, &c. D'où il suit que dans le tems qu'il auroit parcouru ces parties de la direction AX par la vitesse d'impulsion, il a décrit sur la courbe les arcs correspondans : c'est pourquoi si on sçait à quel point de la direction AX le corps se trouveroit par la vitesse d'impulsion, on déterminera l'endroit de la courbe où il se trouve en menant de ce point une parallele à la direction de la pesanteur. Il est encore évident que les arcs compris entre les paralleles également éloignées, sont décrits en tems égaux, puisqu'ils sont décrits pendant que le mobile parcourroit par la vitesse qu'il a reçue suivant AX, les parties égales de cette ligne comprise entre les paralleles.

52. 4°. La ligne AX est tangente de la courbe au point A ; car au moment de l'impulsion suivant AX, la pesanteur détourne le mobile de cette direction ; d'ailleurs les

lignes GI, MN, OP, &c. ſont les prolongemens des côtés de la courbe, & par conſéquent tangentes : or ces mêmes lignes ſont les prolongements des côtés de la courbe parce qu'ils ſont auſſi côtés des parallelogrammes dont les diagonales forment la courbe ; donc AB qui eſt le côté d'un de ces parallelogrammes, eſt auſſi le prolongement d'un des côtés de la courbe : elle eſt donc tangente.

53. 5°. Les verticales BG, CM, DO, EQ compriſes entre la tangente AX, & la courbe ſont les eſpaces que la peſanteur auroit fait parcourir au mobile, tandis qu'il a decrit les arcs AG, AM, AO, AQ, &c. car par la viteſſe qu'il a reçue ſuivant AX, il auroit parcouru dans les mêmes tems les eſpaces AB, AC, AD, AE, & ſe ſeroit trouvé aux points B, C, D, E ; or puiſqu'il ſe trouve aux points G, M, O, Q, &c. & que d'ailleurs la peſanteur a agi ſans relâche comme ſi elle n'eût pouſſé le corps que ſur une même verticale, il s'enſuit qu'il a parcouru ſuivant ſa direction naturelle des eſpaces proportionnés à la loi de la péſanteur ; c'eſt-à-dire, qui ſont dans la raiſon des quarrés des tems employés à les parcourir (32). Cela poſé, les parties AB, BC, CD, DE, &c. étant égales entr'elles, peuvent répréſenter les parties égales du tems, & les parties AB, AC, AD, AE, &c. les tems depuis le moment de l'impulſion juſqu'aux inſtans que le mobile arrive aux points G, M, O, Q, &c. par conſéquent les verticales BG, CM, DO, EQ, &c. qui ſont entr'elles comme les quarrés des tems, ſont auſſi entr'elles comme les quarrés des parties AB, AC, AD, AE.

54. 6°. Suppoſant encore que les directions de la peſanteur ſont paralleles dans l'étendue du jet, les verticales menées à la courbe ne la rencontrent qu'en un point, quoique prolongées ; car comme on peut ſuppoſer que le mobile avanceroit toujours ſuivant AX avec la viteſſe d'impulſion, les verticales paralleles rencontreroient la courbe à des points de plus en plus éloignés de la verticale AZ ; la courbe iroit donc en s'écartant de plus en plus de cette verticale, & ne rentrant point en elle-même, les verticales ne la rencontreroient qu'en un point.

55. Dans la parabole les lignes paralleles entr'elles, & qui prolongées ne la rencontrent qu'en un point, sont appellées *diametres*; les lignes telles que GL,MV paralleles à la tangente AX menées des points G,M, &c. de la parabole, jusqu'à ce qu'elles rencontrent le diametre AZ qui passe par le point A, sont appellées *ordonnées au diametre* AZ ; & les parties AL,AV du même diametre comprises entre le point A d'attouchement, & les ordonnées sont appellées *coupées* ou *abcisses*. Cela étant ainsi 1°. les ordonnées GL,MV sont égales aux parties AB,AC, &c. de la tangente AX, & les parties AL, AV égales aux lignes BG, CM, &c. paralleles au diametre AZ, & comprises entre la tangente AX & la parabole (2. *Géom.*). 2°. La principale propriété de la parabole est que les quarrés des ordonnées GL, MV sont entr'eux comme les coupées AL, AV.

56. *La courbe que les projectiles décrivent est une parabole*. Car la courbe décrite a cette propriété que les quarrés des parties AB, AC, AD, &c. de la tangente ou de leurs égales GL,MV, soient entr'eux comme les lignes BG,CM, &c. ou leurs égales AL, AV, &c. Or c'est-là la principale propriété de la parabole ; donc la courbe décrite par les projectiles est parabolique.

57. Lorsqu'un corps est jetté suivant une direction au-dessus de l'horison, le plus haut point de la parabole décrite en est le *sommet*; la ligne horizontale AT [*Fig.*20.] qui joint les points A,T du départ & de l'arrivée, est appellée *étendue du jet* ou *amplitude de la parabole*; la ligne AY qui joint le point de départ A avec le point Y au-dessus & au-dessous de l'horizontale AT, où le corps s'est arrêté, est appellée ligne *de distance* ; la ligne AX ligne *de projection*. Lorsque le jet est horizontal [*Fig.* 21.] le sommet de la parabole est au point de départ ; si le jet est incliné au-dessous de l'horizon, le sommet de la parabole décrite est au-dessus du point de départ.

Propriétés & circonstances des jets, & en particulier de la force du jet.

58. Par la force du jet on entend la force qui est appliquée au corps, au moment qu'il est poussé suivant quelque direction ; elle est proportionnelle au produit de la masse & de la vitesse que le corps reçoit de la force externe qui le pousse (*Liv. I.* 48.) : si la masse est la même, la force du jet est proportionnelle à la vitesse (*Liv. I.*46.) ; si la vitesse est la même, la force est proportionnelle à la masse (*Liv. I.* 47.) ; si la masse & la vitesse sont les mêmes, la force du jet est aussi la même pour toutes les directions.

59. Nous avons déja nommé vitesse *d'impulsion* celle que le mobile reçoit de la force externe qui lui est appliquée : on peut aussi l'appeller vitesse de *projection*.

Dans ce qui vient d'être dit du mouvement d'un projectile, nous l'avons consideré comme composé de la vitesse d'impulsion & de celle que la pesanteur lui communique ; mais afin de mieux discerner les effets de la pesanteur, & voir distinctement la part qu'elle a au mouvement des corps jettés, nous allons considérer la vitesse d'impulsion comme composée de l'*horizontale* & de la *verticale*.

60. La vitesse d'impulsion, la vitesse verticale, & la vitesse horizontale sont exprimées par les côtés d'un triangle rect. ADF. [*Fig.*22.] Car si la pesanteur ne retardoit point le mobile, & si elle ne le détournoit point de sa direction, il est certain que tandis que par la vitesse d'impulsion il parcourroit AD, par la vitesse horizontale il parcourroit AF, & par la vitesse verticale il parcourroit FD : or lorsque les tems sont égaux, les vitesses sont comme les espaces parcourus (*Liv. I.* 5.) Donc, &c.

61. La vitesse horizontale demeure la même pendant la durée du jet. Cela est évident, 1°. parce que la direction horizontale n'est point contraire à la verticale. 2°. Nous avons vû [*Fig.* 20. 21.] que si l'on divise la ligne de projection AX en parties égales, que l'on imagine par tous les points de division des verticales qui rencontrent la courbe

de projection, les arcs compris entre ces verticales également éloignées, sont décrits en tems égaux (51): or c'est par la vitesse horizontale que le mobile décrit les intervalles égaux qui sont entre ces verticales; donc puisqu'en tems égaux il parcourt par cette vitesse des espaces égaux, il s'ensuit qu'elle est uniforme pendant la durée d'un même jet. Quoique la vitesse horizontale soit la même pendant la durée d'un jet, elle augmente néanmoins ou elle diminue selon les différentes lignes de projection, en supposant que la vitesse d'impulsion est la même pour tous ces jets.

62. Dans un même jet la vitesse verticale est continuellement retardée, puisque par cette vitesse le corps monte contre sa direction naturelle; elle reçoit les mêmes changemens que lorsque le mobile est poussé verticalement de bas en haut; ainsi elle est uniformément retardée (36), & les espaces qu'elle fait parcourir en tems égaux, sont comme les nombres impairs de la suite des nombres naturels, pris dans un ordre renversé (39. 31.)

63. Dans la proposition suivante [*Fig.* 23.] nous supposerons qu'un corps étant descendu librement le long du diametre vertical AT du demi cercle AMT, lorsqu'il est arrivé au bas au point A, il est poussé avec la vitesse qu'il a acquise par la hauteur TA, suivant quelque direction AX qui coupe la demi-circonférence AMT au point M duquel il faut mener l'horizontale MP qui coupe le diametre vertical AT au point P. Cela posé,

PROPOSITION V.

64. *Je dis* 1°. *que la vitesse d'impulsion est à la vitesse verticale comme la corde* AM *est à la partie* AP *du diametre vertical* TA. 2°. *La vitesse verticale est égale à celle que le mobile acquerroit par* PA. 3°. *Tandis que par cette vitesse le mobile monte & descend par la hauteur* PA, *il parcourt suivant l'horizontale* AZ *un espace* AB *quadruple de l'ordonnée* PM [Fig. 23.]

Premiere Partie. Il faut prendre sur AX la partie AN

égale au double du diametre AT, & abbaiser sur l'horizontale AH la perpendiculaire NH. Cela fait dans un tems égal au tems de la descente par TA, le mobile parcouroit uniformément avec la vitesse acquise AN double de TA (29), & par la vitesse verticale il monteroit à la hauteur HN; donc la vitesse d'impulsion qui est la même que la vitesse acquise par TA est à la vitesse verticale comme AN est à NH (60) : or parce que les triangles ANH, AMP sont semblables AN . NH :: AM . AP (8. *Géom.*); donc la vitesse d'impulsion est à la vitesse verticale comme AM est à AP.

Seconde Partie. La vitesse verticale propre au jet par AX est égale à celle que le mobile acquerroit par PA.

Car parce que AM est moyenne proportionnelle entre AP & AT. (39. *Géom.*), nous avons $\overline{AP}^2 . \overline{AM}^2$ :: AP . AT (26. *Arith.*); & si nous tirons les racines quarrées de ces quatre grandeurs, nous aurons AP . AM :: $\sqrt{AP} . \sqrt{AT}$. (24. *Arith.*) Cela posé, la vitesse verticale & la vitesse d'impulsion sont entr'elles comme AP & AM; donc elles sont entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs AP, AT : or les vitesses que le mobile acquerroit par AP & AT, sont aussi entr'elles comme les racines quarrées de ces hauteurs; (34) donc la vitesse verticale & la vitesse d'impulsion sont entr'elles comme les vitesses acquises par PA & TA; (24. *Arith.*) mais la vitesse d'impulsion & la vitesse acquise par TA sont la même vitesse; donc la vitesse verticale & la vitesse acquise par PA sont aussi la même vitesse. (5. *Arith.*)

Troisiéme Partie. Puisque la vitesse d'impulsion & la vitesse verticale sont entr'elles comme les côtés AM, AP du triangle rectangle APM, ainsi qu'il vient d'être prouvé dans la premiere partie, il s'ensuit que la vitesse horizontale est exprimée par la base PM du même triangle (60). Cela posé, tandis que le mobile avec la vitesse verticale laquelle ne differe point de celle qu'il acquerroit par PA, montera à cette hauteur par un mouvement retardé, il parcourroit avec cette vitesse uniforme le double de PA,

(29. 30), & avec la viteſſe d'impulſion le double de AM; donc avec la viteſſe horizontale il parcourra le double de PM (61); mais parce que le mobile eſt autant de tems à deſcendre qu'à monter (37), il s'enſuit que dans le tems de la montée & de la deſcente par PA, il parcourra un eſpace quadruple de PM, puiſque la viteſſe horizontale eſt la même pendant la durée du jet.

65. *Corollaires.* 1°. L'étendue du jet ou l'amplitude de la parabole eſt quadruple de PM.

66. 2°. Si la ligne de projection AX diviſe la demi-circonférence en deux parties égales, pour lors l'horizontale PM paſſe par le centre, & eſt un rayon; c'eſt pourquoi le quadruple de PM eſt quadruple du rayon du cercle ou double de ſon diametre: or lorſque la ligne de projection diviſe la demi-circonférence en deux parties égales, l'angle d'inclinaiſon eſt de 45 degrés (18. *Géom.*); donc l'étendue du jet ſous l'angle de 45 degrés ou l'amplitude de la parabole eſt égale à deux diametres: mais lorſque l'horizontale PM paſſe par le centre, elle eſt la plus grande qu'il eſt poſſible, de même que le quadruple de cette ligne; donc le jet par l'angle de 45 degrés a la plus grande étendue, laquelle eſt égale à deux diametres.

67. 3°. Si les lignes de projection paſſent par des points également diſtans du milieu de la demi-circonfér. AMT, les paraboles décrites auront la même amplitude, ou l'étendue du jet ſera la même; car les ordonnées PM également diſtantes du centre ſont égales; donc le corps, en ſuivant deux routes différentes, rencontre l'horizontale à un point également éloigné du départ.

Du lieu du corps pendant le mouvement.

68. Pour déterminer les différents points de la courbe qu'un projectile décrit, & y aſſigner l'endroit où il ſe trouve pendant la durée du mouvement, nous ferons uſage de trois lignes dont nous allons donner les définitions. Si des points R, D, R, &c. [*Fig.* 24.] on mene des verticales

RO, DB, RO, &c. qui rencontrent la courbe aux points O, B, O, 1°. Les parties AR, AD, AR, &c. de la ligne de projection AX sont aussi appellées chacune en particulier ligne de projection ; 2°. Les verticales OR, BD, OR sont appellées *lignes de chute respective*. 3°. Une ligne AC quadruple de AT d'où l'on suppose que le mobile est tombé pour acquérir la vitesse d'impulsion suivant AX, est nommée par M. Cassini *ligne d'égalité*.

PROPOSITION VI.

69. *Dans un même jet la ligne d'égalité, la ligne de projection & la ligne de chute respective sont en proportion continue.* [Fig. 24.]

Premier cas. Lorsque le point B de la courbe est sur l'horizontale AZ qui passe par le lieu du départ. Il est évident que le point B est éloigné du point A du quadruple de PM (64. *III. Partie.*), & que AD est quadruple de AM, & DB quadruple de AP (8. *Géom.*). Cela posé, AM étant moyenne proportion. entre AT & AP (39. *Geom.*), nous avons la proportion AT. AM :: AM . AP ; & quadruplant ces quatre lignes, ou bien prenant leurs valeurs, nous aurons AC . AD :: AD . DB.

Second cas. Lorsque le point cherché O est au-dessus ou au-dessous de l'horizontale AZ.

Puisque AD est moyenne proportionnelle entre AC & DB, nous aurons $\overline{AC}^2 . \overline{AD}^2$ :: AC . DB (26. *Arith.*), la courbe donne $\overline{AD}^2 . \overline{AR}^2$ :: DB . OR (53). Si on multiplie par ordre les termes de ces deux proportions, qu'on divise les deux premiers produits par $\overline{AD}^2$, & les deux derniers par DB, les quotiens donnent la propor. $\overline{AC}^2 . \overline{AR}^2$ :: AC . OR (21. 8. *Arith.*) ; d'où nous concluons que AC . AR :: AR . OR, puisque (26. *Arith.*) si nous avions cette derniere proportion, nous aurions la précédente.

70. *Coroll.* Si la hauteur AT qui a donné la vitesse d'impulsion est connue, on peut trouver tant de points de la courbe que l'on veut en prenant sur la ligne de projection AX tout autant de parties AR, & cherchant des troisiémes pro-

portionnelles OR à AC quadruple de AT, & aux lignes de de projection AR correspondantes. Réciproquement si des points O, O de la courbe on éleve des verticales qui soient troisiémes proportionnelles à la ligne d'égalité AC, & aux lignes de projection AR correspondantes, le mobile étant poussé suivant la ligne AX, avec la vitesse acquise par AT, passera par les points O, O de la courbe : mais si après avoir mené du point A la ligne de direction AX, les parties AR n'étoient point moyennes propor. entre la ligne d'égalité & les lignes de chute respective OR, les points O, O seroient hors de la courbe, & le corps étant jetté suivant AX ne passeroit pas par ces points.

PROBLÊME IV.

71. *La force du jet étant donnée, c'est-à-dire, la hauteur* AT [Fig. 23.] *par où le mobile auroit acquis la vitesse d'impulsion étant connue & l'angle d'inclinaison* DAZ, *trouver l'étendue du jet, sa hauteur, la ligne de projection, & la ligne de chute respective.*

Le Problême peut être résolu géométriquement ou en nombres.

Résolution Géométrique sur AT [Fig. 23]. Il faut décrire une demi-circonférence qui rencontre la direction AX au pont M, duquel il faut mener MP perpendic. au diametre AT; porter sur AZ, AB quadruple de PM; du point B élever la verticale DB qui rencontre la ligne de projection au point D. Cela fait, AB sera l'étendue du jet, AD la ligne de projection, DB la ligne de chute respective, & AP la hauteur du jet. Tout cela est évident par ce qui précede, & n'a point besoin d'être démontré (64. 60).

Résolution en nombres. 1°. Dans le triangle AMT l'on connoît l'angle droit M, l'angle ATM lequel est égal à l'angle d'inclinaison DAB, (38. *Géom.*) & le côté AT; donc par les regles de la Trigon. on connoîtra AM; & parce que AM est moyenne proport. entre AP & AT (39. *Géom.*), si l'on divise le quarré de AM par AT, on aura AP, & par conséquent PT; si enfin on trouve une moyenne pro-

port. entre PT & PA, on aura PM. (39. *Géom.*) Cela fait, AP est la hauteur du jet, le quadruple de PM son étendue, le quadruple de AM la ligne de projection, & le quadruple de AP la ligne de chute respective. 2°. Si l'angle d'inclinaison DAB étoit nul, c'est-à-dire, si la ligne de projection étoit horizontale, pour lors le point de départ seroit élevé au-dessus de l'horizontale AZ : supposons qu'il soit en P, & que le corps étant poussé suivant PM, s'arrête sur AZ, on aura le point B où il doit tomber en portant sur AZ, AB double de AM. Car si le corps étoit poussé suivant AM avec la vitesse acquise par TA, dans le tems que par le mouvement retardé il monteroit à la hauteur AP, avec la même vitesse uniforme il parcourroit le double de AM (64. *III. Partie.*) : or le tems de la descente par AP est égal au tems de la montée ; donc dans ce même-tems le mobile avec la vitesse d'impulsion uniforme parcourroit le double de AM ; mais lorsque le jet est horizontal, la vitesse d'impulsion ne differe point de la vitesse horizontale, laquelle est uniforme pendant la durée du jet (61) ; donc dans le tems de la descente par PA, c'est-à-dire, pendant la durée du jet, le mobile parcourra suivant l'horizontale le double de AM.

Pour avoir AM en nombres, il faut trouver une moyenne proportionnelle entre AP & AT qui sont connues.

Dans le Problême qui vient d'être résolu, on a supposé que la vitesse d'impulsion, ou ce qui revient au même, la hauteur AT qui la donneroit est connue ; mais dans la pratique on a besoin de la déterminer, le Problême suivant en donne le moyen.

PROBLÊME V.

71. *Un corps étant poussé suivant une direction* AD [Fig. 25. 26.] *horizontale ou inclinée, trouver la force du jet ou la hauteur* AT *qui donneroit la vitesse que le mobile a reçu suivant* AD.

Résolution. Il faut remarquer l'angle DAB formé par la direction AD & le rayon visuel qui passe par le point A

du départ, & le lieu B où le mobile s'est arrêté, & l'angle DAC formé par la verticale AC & la direction AD, & imaginer la verticale DBE; il faut aussi mesurer actuellement ou par la Géométrie pratique, la distance AB. Cela fait, dans le triangle DAB on connoît le côté AB, l'angle DAB & l'angle ADB lequel est égal à l'angle DAC son alterne; donc dans le triangle DAB on connoît deux angles & un côté; donc on pourra trouver par la Trigonométrie les deux autres côtés AD, DB : or ces deux lignes sont, l'une la ligne de projection, & l'autre la ligne de chute respective (68); donc la troisiéme proportionnelle à DB, DA sera la ligne d'égalité AC (69) dont le quart AT est la hauteur d'où le mobile tombant librement, acquerroit la vitesse qu'il a reçue suivant AD (68); puisqu'étant jetté suivant AD avec la vitesse acquise par TA, il passeroit par le point B.

CHAPITRE IV.

Des corps pesans mûs sur des plans inclinés, par le mouvement acceleré ou retardé de la pesanteur.

73. NOUS considererons les plans ou surfaces planes comme exemptes de toutes âpreté, comme parfaitement lisses ou polies; ensorte qu'elles n'ôtent rien aux corps de leur mouvement.

Nous examinerons 1°. ce qui arrive aux corps mûs sur un seul plan incliné. 2°. Ce qui arrive lorsqu'ils sont mûs sur plusieurs plans inclinés contigus les uns aux autres. 3°. Nous appliquerons les principes établis aux pendules.

Des corps mûs sur un plan incliné.

74. Un plan est appellé *incliné* lorsqu'il fait des angles inégaux avec l'horizon, l'un aigu, l'autre obtus; si les deux angles sont droits, le plan est *vertical*.

75. Suivant cette définition, la direction de la pesanteur est oblique à un plan incliné, puisqu'elle est perpendiculaire au plan horizontal, & parallele au plan vertical.

76. La direction de la pesanteur étant oblique au plan incliné, cette force se décompose en deux efforts, l'un parallele, l'autre perpendiculaire au plan (*Liv. I.* 74.); ce dernier effort presse le plan, mais l'effort parallele doit faire descendre le corps.

77. Dans un plan incliné il faut considérer la longueur, la hauteur & la base. Ces trois choses sont représentées par les trois côtés d'un triangle rectangle; les deux côtés de l'angle droit représentent, l'un la base, & l'autre la hauteur, & l'hypothenuse la longueur du plan incliné.

78. *Un corps qui descend librement sur un plan incliné est mû d'un mouvement uniformément acceleré.* Car la pesanteur qui le pousse est une force constante (26); d'ailleurs elle agit suivant des directions paralleles entr'elles (47); de plus le plan incliné résiste par tout de la même maniere à cette force: ainsi l'action de la pesanteur étant modifiée de la même maniere dans toute la longueur du plan, y doit produire à chaque instant un égal degré de vitesse (*Liv. I.* 45. 52.): par conséquent les degrés de vitesse augmentent comme le tems; donc le mouvement sur un plan incliné est uniformément accéleré.

Si un corps monte le long d'un plan incliné, son mouvement est uniformément retardé. Car la pesanteur lui ôte à chaque instant un égal degré de vitesse; donc le mobile est uniformément retardé.

79. Il suit de-là que si un corps après être descendu le long d'un plan incliné, est repoussé vers le haut avec la vitesse qu'il a acquise, 1°. il sera autant de tems à la perdre, qu'il en a été l'acquérir; qu'ainsi le tems de la montée sera égal au tems de la descente. 2°. Que le mobile remontera précisément à la hauteur d'où il est descendu. 3°. Que les espaces parcourus en tems égaux sont comme les nombres impairs de la suite des nombres naturels, avec cette différence que la progression augmente lorsque le corps

descend, & qu'au contraire elle diminue lorsqu'il monte. 4°. Que l'espace parcouru soit en montant soit en descendant, n'est que la moitié de celui qui seroit parcouru uniformément en même-tems avec la vitesse acquise au bas du plan, ou avec celle qu'il a entierement perdue en remontant au haut du plan; qu'ainsi cet espace est représenté par l'aire d'un triangle rectangle, dont la hauteur exprime le tems, & la base la vitesse acquise ou perdue à la fin de ce tems. 5°. Que les espaces parcourus depuis le premier instant de la descente ou le dernier de la montée, sont entr'eux comme les quarrés des vitesses & des tems. 6°. Que les vitesses acquises pendant deux tems, & ces deux tems sont comme les racines quarrées des espaces parcourus; & si le corps monte, que les tems & les vitesses qui restent sont comme les racines quarrées des espaces qu'il a encore à parcourir.

Ces Corollaires suivent naturellement du principe, que le mouvement d'un corps qui descend librement sur un plan incliné, est uniformément accéleré ou retardé, & les preuves ne sont point différentes de celles qu'on a apportées dans le mouvement vertical des corps pesans pour prouver des Corollaires entierement semblables à ceux-ci; c'est pourquoi il n'est point nécessaire de les répeter en cet endroit.

80. Nous avons vû que la pesanteur d'un corps qui descend sur un plan incliné, se décompose en deux efforts, l'un qui presse le plan, l'autre qui meut le corps sur le plan (76); ce dernier effort est appellé *gravité* ou *pesanteur relative*, pour la distinguer de la pesanteur ou gravité absolue du corps. La gravité relative d'un corps qui descend sur un même plan incliné, est une force constante, puisqu'elle accélere le corps uniformément; mais elle varie selon l'inclinaison du plan: or quelle que soit cette inclinaison, la gravité relative est égale à une force qui retient le corps suivant une direction parallele au plan incliné: car deux forces qui étant directement opposées ne se surmontent point ou sont en équilibre, sont égales.

PROPOSITION VII.

81. *La gravité absolue d'un corps est à la gravité relative comme la longueur du plan incliné est à sa hauteur.* [Fig. 27.]

Démonstration. Supposons que la puissance M tient le corps sur le plan incliné suivant une direction parallele au plan, la pesanteur absolue est décomposée en deux efforts, l'un perpendiculaire qui presse le plan & auquel le plan résiste, l'autre parallele, c'est la gravité relative avec laquelle la puissance M fait équilibre : or la gravité absolue & les efforts qui en dérivent sont exprimés par la diagonale CE & les côtés CO, CF du rectangle OF (*Liv. I.* 74.) : ainsi la pesanteur absolue & la gravité relative sont entr'elles comme la diagonale CE & le côté CF, ou bien comme les côtés CE, EO du triangle rectangle COE : mais le triangle COE, est semblable au triangle ABD; car les angles O,B sont droits, l'angle CEO est égal à son alterne ADB; donc CE . EO :: AD . DB (8. *Géom.*); donc la gravité absolue & la gravité relative qui sont dans le rapport de CE à EO, sont entr'elles comme la longueur AD & la hauteur DB du plan incliné.

82. *Coroll.* 1°. *La pesanteur absolue & la gravité relative impriment au mobile des vitesses qui sont dans la raison de la longueur à la hauteur du plan incliné.* Car les vitesses que deux forces constantes impriment en même-tems à un mobile sont dans la raison de ces forces (*Liv. I.* 59.) : or les forces dont il s'agit ici sont entr'elles comme la longueur & la hauteur du plan incliné; donc les vitesses qu'elles communiquent en même-tems à un mobile, sont dans la raison de cette longueur à la hauteur.

2°. *Si de l'angle droit* B *on abbaisse* BG *perpendiculaire sur la longueur* AD *du plan, la gravité absolue fera parcourir la hauteur* BD *dans le tems que la gravité relative fera parcourir* DG : car le triangle BDG est semblable au triangle ADB; ainsi BD & DG sont dans la même raison que la longueur AD & la hauteur DB, c'est-à-dire,

dans la raiſon des forces qui meuvent le corps, ou dans la raiſon des viteſſes qu'elles lui impriment (82); par conſéquent ces eſpaces ſont parcourus en même-tems. (*Liv.* I. 5.)

83. 3°. Si pluſieurs plans inclinés ont une même hauteur DB [*Fig.* 28.], que de l'angle droit B l'on mene ſur les longueurs de ces plans des perpendiculaires BC, BG, BI, les parties DC, DG, DI, compriſes entre le ſommet D & les perpendiculaires, ſeront parcourues en même-tems ou en tems égaux; ſçavoir en même-tems que le mobile deſcendroit par la hauteur commune DB (82. *n.* 2.)

84. 4°. Si ſur DB comme diametre on décrit une demi-circonférence, elle paſſera par les ſommets des angles droits C, I, G, (33. *Géomet.*) & les parties DC, DG, DI ſeront cordes du cercle décrit; donc les cordes tirées de l'extrémité ſupérieure d'un diametre vertical ſont parcourues en tems égaux.

85. 5°. Les cordes BC, BI, BG ſeront auſſi parcourues en même-tems: car ces cordes ſeront parcourues en même-tems que les cordes DN, DF, &c. qui leur ſont égales & paralleles: or les cordes DN, DF ſeroient parcourues en tems égaux; donc BC, BI, BG ſeront auſſi parcourues en tems égaux.

De ce que la gravité abſolue & la gravité relative ſont dans le rapport conſtant de la longueur à la hauteur du plan incliné, on pourroit déduire les mêmes Corollaires de l'article (79).

PROPOSITION VIII.

86. *Le tems qu'un corps eſt à deſcendre par* DA [Fig. 27.] *eſt au tems qu'il eſt à deſcendre verticalement par* DB *comme* DA *eſt à* DB, *c'eſt-à-dire, que les tems des deſcentes ſont comme les eſpaces parcourus.*

Démonſtration. A cauſe que DA, DB & DG ſont en proportion continue, parce que les triangles DAB, DBG ſont ſemblables (8. *Géom.*), nous aurons $\overline{DA}^2 . \overline{DB}^2 :: DA . DG$ (26. *Arith.*); donc les racines quarrées de ces quatre

grandeurs sont encore en proportion, c'est-à-dire ; que DA. DB : : √DA. √DG (24. *Arith.*). Cela posé, les tems par DA & DG sont entr'eux comme les racines quarrées de DA & de DG (79. *n.* 6); de plus le tems par DB est égal au tems par DG; (82 *n.*2.) donc les tems par DA & DB sont entr'eux comme les racines quarrées de DA & de DG; mais ces racines sont entr'elles comme DA & DB; donc les tems par DA & DB sont entr'eux comme DA & DB (14. *Arith.*), c'est-à-dire, comme les espaces parcourus.

En nombres. Supposons que DA est triple de DB, DB sera triple de DG à cause de la proportion continue DA. DB : : DB. DG. Donc DA est neuf fois plus grand que DG, c'est-à-dire, que DA. DG : : 9. 1 : or les tems par DA & DG sont entr'eux comme les racines quarrées de ces longueurs (79. *n.* 6); c'est-à-dire, comme 3 & 1 racines quarrées de 9 & de 1; de plus le tems par DB est égal au tems par DG; donc les tems par DA & par DB, sont entr'eux comme 3 & 1, c'est-à-dire, comme DA & DB.

87. *Coroll.* Il suit de cette Proposition que la gravité absolue & la gravité relative sont entr'elles réciproquement comme les tems qu'elles emploient à faire parcourir à un mobile la hauteur & la longueur du plan incliné; car ces forces sont entr'elles comme la longueur & la hauteur du plan, & au contraire les tems sont entr'eux comme la hauteur & la longueur; donc, &c. (3. *Arith.*)

PROPOSITION. IX.

88. *Un mobile acquiert la même vitesse en descendant le long d'un plan incliné, qu'en parcourant librement la hauteur de ce plan* [Fig. 27].

Démonstration. Pour avoir la vitesse acquise par DB, il faut multiplier la vitesse instantanée ou initiale que la gravité absolue imprime au mobile par le tems de la descente le long de DB, puisque la vitesse par DB est uniformément accélérée (27). Pareillement pour avoir la vitesse acquise sur le plan incliné DA, il faut multiplier la vitesse initiale

que la gravité relative imprime au mobile par le tems de la descente le long de DB, puisque le mouvement le long de DA est uniformément accéléré (78). Cela posé, les vitesses instantanées que le mobile acquiert par DB & DA sont exprimées par DA & DB (82.*n*.1.); mais les tems sont comme DB & DA (86); donc si on multiplie DA & DB, qui expriment les vitesses, par DB & DA, qui expriment les tems, les produits DA×DB & DB×DA exprimeront les vitesses acquises à la fin de ces tems. Or ces produits sont égaux; donc les vitesses acquises qu'ils représentent sont aussi égales.

En nombres. Supposons que DA est triple de DB, la gravité absolue sera trois fois plus grande que la gravité relative (81); c'est pourquoi, si les tems des descentes étoient égaux, les vitesses acquises par DB & DA seroient entr'elles comme 3 & 1 (*Liv. I.* 59); mais le tems par DA est triple du tems par DB (86); donc dans un tems triple le mobile acquerra une vitesse triple, & par conséquent égale à la vitesse acquise par DB.

89. *Corollaire.* Si un corps descend par plusieurs plans inclinés qui ont la même hauteur, il acquiert des vitesses égales; sçavoir égales à celle qu'il acquerroit en parcourant librement la hauteur commune.

Des corps pesans mûs sur plusieurs plans inclinés & contigus.

90. Lorsqu'un corps parcourt une suite de plans inclinés & contigus, il change sa direction à la rencontre de chaque nouveau plan, & la pression qu'il y cause ou la résistance qu'il trouve lui ôte une partie de son mouvement: mais si ces plans forment par leur rencontre des angles infiniment grands, le choc sera insensible, de même que la perte de la vitesse: cependant quelque petit que soit le choc, il s'en fait un, lequel produit une diminution de vitesse; d'où il suivroit que toutes ces petites pertes accumulées devroient enfin faire une perte totale qui fût sensible: or dans *les principes* on a prouvé que si un corps décrit la

circonférence d'un cercle dont les côtés peuvent être considérés comme des plans inclinés qui font entr'eux des angles infiniment grands; l'on a prouvé, dis-je, qu'il la parcourt une infinité de fois avant que d'avoir perdu toute sa vitesse. Selon ce principe, on peut supposer qu'un corps qui décrit une courbe conserve toute sa vitesse, lorsque la courbure est la seule cause qui la diminue.

PROPOSITION X.

91. *Si un corps descend par une suite de plans inclinés & contigus, & qui font des angles infiniment grands, il aura acquis au bas de tous ces plans la même vitesse que s'il descendoit librement par la hauteur* HK *de tous ces plans* [fig. 29].

Démonst. La vitesse acquise par les plans AB & GB est la même (89). D'ailleurs le corps en descendant par AB ne perd rien de sa vitesse à la rencontre du plan BC; donc la vitesse acquise par les deux plans ABC est égale à la vitesse acquise par le plan GC, ou par le plan CH (89); d'ailleurs le corps ne perd rien de sa vitesse à la rencontre du plan DC; donc la vitesse acquise par les plans GCD, ou par les plans ABCD, est égale à la vitesse acquise par le plan HD : mais cette vitesse est la même que celle que le mobile acquerroit par la hauteur HK (88); donc la vitesse acquise par les plans ABCD est égale à la vitesse acquise par la hauteur HK.

92. Si le mobile remonte par les plans DCBA avec la vitesse acquise, lorsqu'il arrivera au point A, il l'aura toute perdue. Car lorsqu'il sera au point C, il lui restera une vitesse avec laquelle il parviendroit en H (79. *n.* 2), c'est-à-dire, une vitesse égale à la vitesse acquise par HC ou par GC (89) : pareillement lorsqu'il sera au point B, il aura encore une vitesse par laquelle il pourroit parvenir en G, c'est-à-dire, une vitesse égale à celle qu'il acquerroit par GB ou par AB (89) : donc avec cette vitesse restante, il remontera en A en la perdant entierement (79. *n.* 2).

93. *Coroll.* Si un corps descend par l'arc d'une courbe tracée sur un plan vertical, il acquerra une vitesse égale à

celle qu'il acquerroit en descendant par la hauteur verticale de cet arc : & s'il est repoussé vers le haut avec la vitesse acquise, il y parviendra en la perdant entierement.

94. Si plusieurs plans AB, BC, &c. [*Fig.* 30, 31.] contigus sont autant inclinés qu'un pareil nombre d'autres plans *ab*, *bc*, &c. que de plus les premiers d'une part soient proportionnels aux seconds de l'autre part pris de suite & dans le même ordre ; on dit que les premiers sont semblables aux seconds, & qu'ils sont semblablement inclinés. *Si un corps descend par deux suites de plans semblables & semblablement inclinés* ABC, *abc* [Fig. 30, 31.], *les vitesses acquises au bas de ces plans sont entr'elles comme les racines quarrées des longueurs* ABC, *abc* ; car ces vitesses sont égales à celles que le mobile acquerroit par les hauteurs verticales DH, *dh* (88) : or ces vitesses sont entre elles comme les racines quarrées des hauteurs DH, *dh* (34) ; de plus ces racines sont aussi entr'elles comme les racines quarrées des longueurs ABC, *abc* (14. *Arith.*) ; donc les vitesses acquises au bas des plans sont aussi entre elles comme les racines quarrées des longueurs ABC, *abc*.

PROPOSITION XI.

95. *Les tems des descentes par deux suites de plans semblables & semblablement inclinés* ABC, *abc*, *sont entr'eux comme les racines quarrées de ces deux suites* [Fig. 30, 31.] Supposons que le tems par AB est double du tems par *ab*, les espaces parcourus étant entr'eux comme les quarrés des tems (79. *n.* 5), AB sera quadruple de *ab*, & BC quadruple de *bc*, puisque ces plans sont proportionnels (94) ; donc les racines quarrées des longueurs ABC, *abc* sont entr'elles comme 2 & 1. Cela posé, les vitesses acquises par AB, *ab* sont comme les racines quarrées de ces longueurs (79. *n.* 6.), c'est-à-dire, comme 2 & 1, de même que les tems. Lorsque les mobiles sont arrivés aux points B, *b*, ils parcourent BC & *bc* en partie par les vitesses acquises en B & *b*, & en partie par les vitesses que la pesanteur leur imprime en parcourant ces espaces : or 1°. La vi-

tesse acquise en B étant double de la vitesse acquise en *b* sera parcourir un espace quadruple dans un tems double; pareillement la vitesse que le mobile reçoit successivement de l'action de la pesanteur dans un tems double lui fait parcourir durant ce tems double un espace quadruple (79.*n*.5): de sorte que si le tems par BC est double du tems par *bc*, il faut que BC soit quadruple de *bc*: or c'est-là l'hypothèse; donc le tems par BC est double du tems par *bc*, de même que le tems par AB est double du tems par *ab*. Donc le tems par ABC est double du tems par *abc*: c'est-à-dire, que ces tems sont entr'eux comme les racines quarrées des longueurs ABC, *abc*.

Du Pendule circulaire.

96. Le Pendule est composé d'un fil que l'on considere comme inflexible, & d'un poids suspendu à l'une de ses extrémités; on attache l'autre extrémité du fil à un point C, autour duquel le pendule peut tourner librement. Le point C est appellé point de *suspension*, le point E où le poids s'arrête lorsqu'il ne tourne point, est appellé *repos*. [*Fig.* 32.]

97. Lorsqu'un pendule est au repos E, le fil CD est vertical ou perpendiculaire à l'horison; car le fil doit résister directement à l'effort du poids qui est dirigé suivant la verticale.

98. Si on éloigne un pendule du repos E, en lui faisant décrire l'arc EG, qu'on l'abandonne ensuite à lui-même, il descendra par l'arc GE au repos E, puisque la résistance du fil n'est point directement opposée à la tendance du poids; & lorsqu'il sera arrivé au repos, il ne s'y arrêtera point; car avec la vitesse acquise par l'arc EG il retraceroit cet arc (93); mais parce que sa vitesse le détermine à aller par l'arc EF, il continuera de tourner autour du point fixe C jusqu'à ce que cet arc soit égal à EG: pour lors il aura perdu toute la vitesse acquise par l'arc GE (93); il redescendra donc par l'arc FE & acquerra une vitesse par laquelle il pourra décrire l'arc EG, &c. De cette maniere le mouvement du pendule seroit perpétuel si la

résistance de l'air & le frottement que le fil éprouve au point de suspension C ne le retardoient à chaque fois qu'il descend & qu'il monte; mais ces deux causes rallentissent peu à peu sa vitesse, & il rentre bien-tôt dans le repos. On appelle vibration *simple* l'allée par l'arc FG, ou le retour par l'arc GF. On appelle vibration *composée* l'allée & le retour ensemble par l'arc GF, & FG. On appelle vibrations *isochrones* celles qui se font en tems égaux. On appelle *grandes vibrations* celles où le pendule décrit de grands arcs; *petites* celles où il décrit des petits arcs.

PROPOSITION XII.

99. *Les pendules qui décrivent des arcs semblables font leurs vibrations en des tems qui sont entr'eux comme les racines quarrées des longueurs* CE, *ce* [Fig. 32. 33].

Démonst. Les pendules sont mûs par les arcs GE, *ge* comme sur deux suites de plans semblables & semblablement inclinés; donc les tems des descentes sont entr'eux comme les racines quarrées des mêmes arcs ou de leurs rayons CE, *ce* (95): or avec les vitesses acquises en E, *e*, les pendules remonteroient par les arcs GE, *ge* dans des tems égaux aux tems des descentes (79. *n.* 2); de plus les arcs EF, *ef* sont égaux aux arcs EG, *eg*, ils sont aussi situés semblablement à ces premiers arcs; donc avec les vitesses acquises en E, *e* les pendules les décrivent en même-tems que les arcs EG, *eg*; donc les tems par EF, *ef* sont dans la raison des racines quarrées des rayons EC, *ec*; donc les tems par les arcs GEF, *gef*, c'est-à-dire, les tems des vibrations sont comme les racines quarrées des rayons EC, *ec*.

100. Donc les quarrés des tems des vibrations sont entr'eux comme les longueurs des pendules (24. *Arith.*)

101. *Coroll.* 1°. Plus un pendule est long, plus il est de tems à faire ses vibrations; en sorte que si les longueurs des pendules sont entr'elles comme 4 & 1, les tems des vibrations sont entr'eux comme 2 & 1, racines quarrées de ces longueurs.

102. 2°. D'où il suit que tandis que le pendule 4 fera une vibration, le pendule 1 en fera deux.

103. 3°. Il suit encore que si ces pendules battent pendant le même tems, les nombres des vibrations seront entre eux comme 1 & 2, c'est-à-dire, réciproquement comme les racines quarrées de leurs longueurs.

104. 4°. Si on laisse battre deux pendules pendant un même tems, que l'on éleve les nombres des vibrations qu'ils ont faites au quarré, les quarrés de ces nombres sont entr'eux réciproquement comme les longueurs des pendules. Car lorsque quatre grandeurs sont en proportion, leurs quarrés y sont aussi (24. *Arith.*)

PROBLÊME VI.

105. *La longueur d'un pendule étant donnée avec le tems qu'il met à faire ses vibrations, trouver la longueur d'un autre pendule qui fasse les siennes dans un autre tems donné, par exemple, en deux secondes.*

On sçait qu'un pendule qui a 3 pieds $8\frac{1}{2}$ lignes bat les secondes. Il faut dire 1 . 4 :: 3 p. $8\frac{1}{2}$ lig. x, c'est-à-dire, les quarrés de 1 seconde & de 2 secondes sont entr'eux comme les longueurs du pendule à secondes & du pendule à deux secondes, la proportion donne pour la longueur cherchée 12 pieds 2 pouces 10 lignes.

PROBLÊME VII.

106. *Trouver dans quel tems un pendule d'une longueur donnée, par exemple, d'un pied fait ses vibrations.* Il faut réduire la longueur donnée & la longueur du pendule à secondes en lignes, & l'on aura 144 lignes pour la longueur du pendule donné & 441 pour la longueur du pendule à secondes, dont les racines quarrées sont 12 & 21. Cela fait, il faut dire, 21 . 12 :: 60 tierces . x, c'est-à-dire, que les tems des vibrations du pendule à secondes & du pendule donné se font en des tems qui sont comme les racines quarrées de leurs longueurs. L'opération faite on trouve que le pendule d'un pied fait ses vibrations en $34\frac{2}{7}$ tierces.

PROBLÊME VIII.

107. *Le nombre de vibrations qu'un pendule fait pendant un tems donné, étant connu, trouver la longueur du pendule.* Supposons que le pendule fasse 30 vibrations en une minute, le pendule à secondes en fait 60 dans le même tems: or les longueurs des pendules sont entr'elles réciproquement comme les quarrés des nombres de leurs vibrations faites en même-tems; donc la longueur 441 du pendule à secondes est à la longueur cherchée comme 900 quarré du nombre des vibrations du pendule dont on cherche la longueur, est au quarré 3600 du nombre des vibrations du pendule à secondes; c'est-à-dire 900. 3600 :: 441. x. L'opération faite, on trouve que cette longueur est de 12 pieds 2 pouces 10 lignes.

Par ce Problême on peut mesurer la hauteur d'un plancher ou d'une voute, en observant pendant une minute le nombre de vibrations ou balancemens d'un lustre suspendu à la voute.

Fin du Livre second.



LIVRE TROISIEME.

Du Choc ou de la percussion des Corps.

1. UN corps qui est en mouvement peut mouvoir & meut en effet les corps qui se trouvent sur son passage. C'est l'expérience qui nous apprend qu'un corps qui est mû est un principe d'où le mouvement se communique aux corps qu'il rencontre : or pour la production du mouvement, il est nécessaire qu'une cause agisse ; d'ailleurs on est porté à croire qu'une force se trouve là où elle produit son effet ; c'est pourquoi sans discuter ici les diverses questions qu'on peut agiter sur la cause vraîment efficiente du mouvement, rien n'empêche que pour la clarté du discours on ne considere cette force comme appliquée au corps qui choque, & comme faisant une impression permanente sur le corps choqué.

Ce Livre contiendra trois Chapitres. Dans le premier nous verrons les propriétés les plus générales du choc. Dans le second nous considérerons les loix du choc des corps sans ressort, & des corps à ressort. Dans le troisiéme, le choc qui produit la réflexion & la réfraction.

CHAPITRE I.

Des propriétés & des circonstances générales du choc.

2. LEs corps ont des qualités qui peuvent modifier & varier considérablement l'action qu'ils exercent les uns sur les autres : de ce nombre sont la dureté, la mollesse, la fluidité, l'élasticité.

Un corps *dur* est celui qui ne change pas facilement de figure ; un corps *mou* en change facilement sans se rompre ;

un corps *fluide* cede facilement au toucher, & les parties se divisent au moindre effort; un corps *élastique* ou à *ressort* est celui qui ayant changé de figure par l'action d'une force externe, se rétablit & reprend de lui-même sa premiere figure; par éxemple, un balon plein d'air. Les corps sans ressort conservent la figure qu'ils ont reçue dans le choc. Le ressort est parfait ou imparfait. Le ressort parfait se comprime & se rétablit avec un force égale à celle qui lui est appliquée; mais le ressort imparfait se comprime ou se rétablit avec une force moindre. Nous réduisons les propriétés & les circonstances du choc à trois; sçavoir la résistance réciproque des corps, la communication du mouvement, & la force du choc.

De la résistance réciproque des corps dans le choc.

3. *La résistance* est une disposition actuelle qui fait qu'un corps étant poussé, ou sollicité à se mouvoir, se maintient, & persévere dans son état présent; ou s'il le change, ce n'est que proportionnellement à la force qui le pousse. On peut distinguer deux résistances, l'une *propre*, elle détruit, diminue, ou empêche l'effet que la force motrice tend à produire; telle est la résistance de deux hommes qui se poussent en sens contraires. La résistance *impropre* laisse produire à la force motrice tout l'effet qu'elle peut produire; telle est la résistance d'un corps qui est choqué étant en repos : car quoiqu'un corps en repos soit prêt à céder au moindre effort, ce n'est pas à dire que la force motrice n'éprouve aucune résistance, & qu'il lui soit aussi aisé de mouvoir une grande masse qu'une petite en faisant même abstraction de la pesanteur.

4. Selon les expériences de M. Mariotte, Proposit. V, Part. I, si l'on frappe d'une même vitesse avec la main deux corps suspendus inégaux en masse, on sentira moins de douleur par la rencontre du corps moins pesant. Si l'on suspend une boule de terre molle, & qu'on la laisse aller avec une certaine vitesse contre une boule de bois en repos suspendue de même, & qui soit deux fois plus pesante, elle la

fera mouvoir plus lentement, & elle s'applatira davantage, que lorsqu'elle en rencontrera une autre qui lui sera égale en poids. Cette inégalité de douleur que la main ressent, & les divers applatissemens que la boule de terre glaise reçoit lorsqu'elle rencontre des corps inégalement pesans, prouvent assez que les corps résistent à la force qui les pousse.

5. Or cette résistance n'est point l'effet de la pesanteur: car 1o. tout l'effort de la pesanteur est soutenu par la résistance du cordon qui tient la boule suspendue de même que si elle étoit posée sur un plan horisontal. 2°. La direction de la boule qui choque est horisontale au moment qu'elle choque, & c'est à ce moment que la boule choquée résiste & avant qu'elle monte. La pesanteur n'est donc point la cause de cette résistance.

6. L'air n'est pas non plus la cause, du moins principale, de cette résistance: car on pourroit demander pourquoi est-ce que l'air résiste, vû qu'il est d'une substance si rare, & qu'il est si aisé de le remuer? Mais une autre expérience de M. Mariotte prouve qu'il ne faut point rapporter cette résistance à l'air comme à sa cause principale; car une boule de plomb de deux livres résiste plus au mouvement, qu'une boule de bois d'une livre, quoique cette derniere étant plus grande pousse avec une plus grande quantité d'air.

7. Cette résistance n'est point non plus l'effet d'une vraie force qui réside dans les corps & qui leur soit comme inhérente & naturelle : car outre qu'on ne conçoit pas bien comment il peut se faire qu'une telle force n'agisse qu'au moment du choc, c'est que l'on ne voit pas non plus comment elle peut résister en même-tems suivant plusieurs directions, lorsqu'un corps est choqué à la fois par plus d'un côté, ni encore comment cette force change de direction selon le besoin, & selon que la force motrice en change elle-même.

8. Il faut donc conclure que la résistance que le corps fait à la force motrice, est l'effet immédiat de la volonté du Créateur qui a établi la loi du choc; puisqu'il n'y a rien ni au-dedans ni au-dehors des corps qui puisse leur donner la

résistance que l'expérience y fait découvrir.

9. *La résistance impropre cause dans la force motrice les mêmes changemens que la résistance propre.* En voici une preuve sensible. Voyons ce qui arrive lorsqu'un cheval tire une pierre de taille suivant une direction horisontale : au moment qu'il fait effort pour la mouvoir, non-seulement sa vitesse est retardée, mais il éprouve la même difficulté que si la masse de la pierre étant détruite, il étoit tiré en arriere avec un effort égal à celui qu'il fait sur la pierre ; car la corde est bandée de même que si elle étoit tirée par deux forces en des sens opposés.

10. La force de traction est donc également appliquée au cheval & à la pierre ; c'est-à-dire, que le cheval se trouve dans le même état que s'il étoit tiré en arriere avec autant de force que la pierre est tirée en avant.

M. Newton appelle *force d'inertie* la résistance que les corps font au mouvement ; il lui attribue une réaction qui est égale à l'action que la force motrice exerce sur les corps qu'elle meut. Si ces expressions ne signifient rien de plus que le fait qui vient d'être exposé, rien n'empêche qu'on n'en fasse usage ; car lorsqu'un corps est tiré ou poussé, il résiste, & cette résistance est équivalente à une réaction ; néanmoins on ne peut pas dire que ce soit une véritable réaction ; parce qu'elle ne détruit pas absolument l'action de la force motrice.

De la communication du mouvement dans le choc.

11. Tous les corps que nous connoissons sont flexibles ; s'il y a dans l'Univers des corps d'une dureté parfaite, l'expérience ne nous apprend rien des loix qu'ils suivent : ainsi ou il faut omettre d'en parler, ou bien le faire par analogie avec ceux que l'on connoît : or on observe que si des corps durs se choquent, le plus ou le moins de dureté n'apporte aucun changement à la loi du choc ; s'il y a quelque différence, on s'apperçoit que c'est le ressort qui la cause. Il est donc plus que vraisemblable que s'il y a dans l'univers des corps parfaitement durs, ils reçoivent dans le

choc la même quantité de mouvement que les corps mous sans ressort.

12. Dieu étant le maître absolu des loix du choc, & de la communication du mouvement, en auroit pu établir de toutes différentes de celles que l'expérience a fait découvrir; d'où il suit qu'on ne peut pas les déduire de la seule idée que l'on a de la matiere & du mouvement. L'esprit de systême en cette matiere consiste donc à choisir entre les faits observés ceux qui sont les plus simples, & à en déduire ceux qui sont composés.

De la communication du mouvement dans le choc des corps mous sans ressort.

13. *La communication du mouvement dans le choc des corps mous sans ressort est successive.* Car ces corps sont applatis dans le choc; or la partie enfoncée de chacun ne s'approche ainsi du centre que dans un tems fini. Donc, &c.

14. *Le corps* A *perd de sa vitesse en choquant le corps* B. Car lorsque le corps A est applati dans sa partie antérieure, cela ne peut se faire que cette partie ne soit retardée, puisqu'elle avance moins vîte que le centre & le reste de la masse. Donc, &c.

15. *Si le corps* B *est choqué en repos, il reçoit tout le mouvement que le corps* A *perd dans le choc.* Car la force du choc est également appliquée au choqué & au choquant, mais en sens contraire (10); elle produit donc dans le choqué B la quantité de mouvement qu'elle détruit dans le corps A.

16. *Si le corps* A *attrappe le corps* B *qui va devant, il perd aussi une partie de son mouvement, & le corps* B *la reçoit toute.* Car en ce que le corps B va moins vîte, il est choqué comme s'il étoit en repos: ainsi le corps A perd de son mouvement; & parce que la force du choc est également appliquée au choquant & au choqué (10), & que d'ailleurs le mouvement primitif du corps B n'est point contraire à celui que le corps A perd, il s'ensuit que le corps B reçoit tout ce que la force du choc en détruit dans le corps A: ainsi le mouvement que le corps A perd en cho-

quant le corps B, eſt égal à la différence des mouvemens que ce corps a avant & après le choc.

17. *Si les corps ſe choquent en allant ſuivant des directions oppoſées, 1°. le plus foible perd ſon mouvement, & en détruit une égale quantité dans le plus fort. 2°. Le plus fort choque le plus foible avec la différence des mouvemens.* Car la force du choc eſt également appliquée aux deux mobiles, mais en ſens contraires (10) : or cette force ne peut point d'abord être plus grande que celle du plus foible ; car le plus fort ne peut agir ſur le plus foible qu'autant que celui-ci réſiſte ; donc la force du choc détruit d'abord le mouvement du plus foible, & une égale quantité dans le plus fort. 2°. Le plus foible après avoir perdu ſon mouvement eſt comme en repos à l'égard du plus fort, celui-ci choque donc avec la différence des mouvemens, & communique au plus foible tout ce qu'il en perd par ce ſecond choc.

18. Il paroît que dans ces trois cas la force du choc eſt égale à celle que le choquant perd durant le choc. Par *choquant* il faut entendre celui des corps qui perd du mouvement durant le choc, ſans en jamais recevoir de la force qui le produit.

19. Pour voir d'une maniere ſenſible ce qui arrive aux corps dans le choc, il faut imaginer que les corps A & B ſont attachés à un cordon ; ſi le corps A tire le corps B en repos, ou s'il le tire parce qu'il va moins vîte, le cordon ſera d'abord également tendu en avant & en arriere, le corps A perdra donc une partie de ſon mouvement, & le corps B la recevra, puiſque le corps A s'applique au corps B par tout le mouvement qu'il perd. Si les corps ſont mûs en des ſens oppoſés, ils agiſſent l'un contre l'autre ; pour lors le plus foible perd néceſſairement ſon mouvement, & parce qu'il tire le cordon en arriere avec une force égale à ſon mouvement, il eſt néceſſaire qu'en le perdant il en détruiſe une égale quantité dans le corps A ; mais le plus fort continuant de tirer avec la différence des mouvemens, entraîne dans ſa direction le plus foible, & lui communique tout le mouvement qu'il perd dans cette ſeconde impulſion.

20. *Le corps* A *cesse de perdre de son mouvement lorsque le corps* B *qu'il pousse devant soi est mû d'une vitesse égale à celle qui lui reste*; car la communication du mouvement est successive; il y a donc un instant où les deux corps sont mûs d'une égale vitesse : or c'est à cet instant que le corps A cesse d'agir sur le corps B ; autrement un corps qui n'iroit point plus vîte pourroit choquer, ce qui n'est conforme ni à la loi du choc, ni à l'expérience.

De la communication du mouvement dans le choc des corps à ressort parfait.

21. Les corps à ressort se compriment & sont applatis dans le choc comme les corps mous sans ressort, avec cette différence que les corps mous ne changent de figure que dans l'endroit du contact; *mais les corps à ressort se compriment dans leur partie antérieure & postérieure* : cela est conforme à une expérience de M. Mariotte rapportée dans les *Principes*. Ceci peut aussi être déduit de la maniere dont le choc des corps à ressort se fait. Supposons que la boule A choque la boule B en repos [*Fig.* 34]; si le ressort ne se comprimoit que dans l'endroit du contact, il seroit comme placé entre deux; & s'appuieroit d'un côté sur le choquant & de l'autre sur le choqué : or à chaque fois que le choqué recevroit du choc un nouveau degré de vitesse, le ressort seroit comprimé; mais il se détendroit aussitôt, puisqu'il ne trouveroit dans le choqué que la résistance provenant de la masse, qu'il pourroit toujours surmonter; mais parce que le ressort réagit également sur le choquant & le choqué, à chaque fois qu'il se détendroit, il communiqueroit au choqué un degré de force, & en ôteroit un au choquant; ce qui devroit continuer jusqu'à ce que la vitesse du choquant fût égale à la vitesse du choqué : pour lors le ressort cessant d'être comprimé, seroit dans son état naturel, c'est-à-dire déployé; ainsi le choquant & le choqué seroient mûs ensemble après le choc d'une égale vitesse; ce qui n'arrive jamais dans le choc des corps à ressort.

Donc les corps à ressort sont applatis dans la partie antérieure & postérieure.

22. *Si les corps* A *&* B *prennent dans le choc la fig. d'un sphéroïde applati, la réaction du ressort ne détruit durant la compression aucune partie du mouvement dans le choquant.* Car aussi-tôt que les parties du contact sont comprimées dans l'une & l'autre boule, & qu'elles s'approchent du centre, la partie antérieure du choqué B & la posterieure du choquant A s'en approchent aussi, de même qu'il arrive que les parties d'une corde sont toutes tirées en même-tems d'une égale force en sens contraires; le ressort est donc retenu dans les deux boules par ses deux extrémités durant la compression; donc il n'ôte au choquant aucune partie de son mouvement.

23. *Le ressort ne cesse d'être comprimé que lorsque le choquant & le choqué sont mûs d'une égale vitesse.* Car un ressort qui est tenu assujetti est une force sans mouvement, laquelle ne peut produire aussi le mouvement que dans un tems fini, comme fait, par exemple, la pesanteur : or une telle force peut toujours être surmontée par une force telle qu'est la force du choc, qui produit le mouvement en un instant; de plus tant que le corps A va plus vîte que le corps B, il peut le choquer; donc le ressort ne cesse d'être comprimé que lorsque les deux corps sont mûs d'une égale vitesse.

24. D'où il suit que dans le choc des corps à ressort il faut distinguer deux tems, celui de la compression, & celui de la restitution du ressort.

25. *Le ressort se comprime également dans le choquant & le choqué, & la force de compression est égale à celle que le choquant perd durant qu'il le comprime.* 1°. Le ressort se comprime également dans le choquant & le choqué, parce que la force du choc est également appliquée à l'un & à l'autre corps (10). 2°. Le ressort est comprimé dans les deux corps avec une force égale à celle que le choquant perd durant la compression; car durant ce tems le ressort est tenu assujetti de maniere qu'il ne peut ni retarder le choquant, ni accélerer le choqué (22. 23); de plus il se com-

prime avec une force égale à celle qui lui eſt appliquée, puiſqu'il eſt parfait ; par conſéquent il ſe comprime avec une force égale à celle que le choquant perd durant la compreſſion.

26. *Lorſque la compreſſion finit, l'endroit où le choquant & le choqué ſe touchent eſt un point fixe pour le reſſort de l'un & de l'autre corps.* Car les parties affaiſſées à l'endroit du contact font effort pour ſe relever par la force du reſſort ſuivant des directions contraires ; mais parce qu'elles ſont également comprimées dans le choquant & le choqué (25), elles ne peuvent point ſe ſurmonter ; donc l'endroit du contact eſt un point fixe pour le reſſort.

27. *Le reſſort en ſe rétabliſſant imprime au choquant une quantité de mouvement égale à celle qu'il a perdue durant la compreſſion, & au choqué une quantité pareille* : cela eſt évident, puiſque le reſſort parfait ſe rétablit avec une force égale à celle de la compreſſion, laquelle eſt égale à celle que le choquant perd dans le premier tems du choc. Nous avons conſidéré juſqu'ici le corps B en repos ; ſi les deux corps ſont en mouvement, il faut conſidérer le plus fort, c'eſt-à-dire, celui qui communique du mouvement ſans en recevoir comme le choquant : le reſſort ſe comprime auſſi pour lors avec une force égale à celle qui lui eſt appliquée, laquelle eſt encore égale à celle que le choquant perd durant la compreſſion (10. 18. 19. 22. 23.) ; donc le reſſort communique dans ces deux cas des quantités de mouvement égales à celles que le choquant perd durant la compreſſion. Dans le cas où le choc ſe fait ſuivant des directions contraires, on peut dire encore que le reſſort en ſe rétabliſſant, communique au choqué, c'eſt-à-dire, au plus foible, une quantité de mouvement égale à celle qu'il perd, plus celle qu'il reçoit du choquant durant la compreſſion du reſſort : car la ſomme de ces deux quantités eſt égale à celle que le choquant perd durant la compreſſion du reſſort (17. 19.)

28. Il eſt évident que les mouvemens que le reſſort communique ſont toujours dirigés en ſens contraires dans les

deux corps, & que celui que le choquant en reçoit, tend à le faire retourner en arriere.

De la force du choc.

29. Il paroît par tout ce qui a été dit du choc des corps A & B, que la force du choc est égale à celle que le choquant perd dans le choc, si les corps sont sans ressort; ou bien égale à celle qu'il perd durant la compression du ressort, si les corps sont élastiques. *Le plan d'incidence* est la surface plane par laquelle les corps se touchent à l'instant du choc; si les corps sont sphériques, ce plan est représenté par la tangente tirée au point de contact.

30. Le choc est *direct* ou *oblique*; il est direct lorsque les directions des mobiles sont perpendiculaires au plan d'incidence; il est oblique, si les directions sont obliques au même plan.

31. La force du choc dépend de la vitesse respective ou de la vitesse avec laquelle les corps s'approchent du plan d'incidence; elle est égale à la somme ou à la différence des vitesses propres avec lesquelles ils s'approchent de ce plan. Nous nommerons encore choquant celui des deux corps qui communique du mouvement par la force du choc sans en recevoir, & l'autre choqué.

PROPOSITION I.

32. *Dans le choc la somme des masses* A+B *est au choqué* B, *comme la vitesse respective ou la vitesse avec laquelle les corps s'approchent du plan d'incidence, est à celle que le choquant* A *perd dans le choc.*

La proposition est vraie pour tous les cas du choc direct & oblique des deux corps. Nous l'allons d'abord prouver pour les trois cas du choc direct. Soit nommée V la vitesse du corps A avant le choc, v la vitesse qu'il garde après le choc, V—v sera la vitesse qu'il perd par la force du choc, & AV—Av, la quantité de mouvement qu'il perd (*Liv. I.* 33). Soit nommée *v* la vitesse du corps B avant le choc, B*v* sera sa quantité de mouvement avant

le choc pour le second & le troisiéme cas, (*Liv. I.* 33.) & Bv sa quantité de mouvement après le choc pour les trois cas ; car la vitesse du corps B est la même que celle du corps A après le choc (20). Cela posé, il est certain que la quantité de mouvement que le corps A perd dans le choc, est égale dans le premier cas à celle que le choqué B reçoit (15) ; mais dans le second cas elle est égale au mouvement du corps B après le choc moins celui que ce corps avoit avant le choc (16) ; & dans le troisiéme cas, elle est égale au mouvement du corps B après le choc plus celui que ce même corps avoit avant, lequel est détruit par la force du choc (17). Nous aurons donc ces trois égalités.

Premier Cas. AV—Av=Bv.
Second Cas. AV—Av=Bv—B*v*.
Troisiéme Cas. AV—Av=Bv+B*v*.

Or il est aisé de déduire la proposition dont il s'agit pour chaque cas particulier de l'égalité qui lui est propre, en réduisant les racines des produits en proportion, & observant que dans le I. Cas la vitesse respective est égale à la vitesse V du choquant avant le choc ; que dans le second elle est égale à la différence V—*v* des vitesses propres avant le choc ; & que dans le troisiéme elle est égale à la somme V+*v* des vitesses propres (*Liv. I.* 22. 24.)

Premier Cas. Nous aurons A . B :: v . V—v (11. *Arith.*) ajoutant les antécedens aux conséquens, & comparant les sommes aux conséquens (9. *Arith.*) A+B . B :: v+V—v . V—v ; & effacant +v—v dans le troisiéme terme, nous aurons A+B . B :: V . V—v ; c'est-à-dire, la somme des masses, &c.

Second Cas. A . B :: v—*v* . V—v (11. *Arith.*) ajoutant comme dans le premier cas (9. *Arith.*) A+B . B :: v—*v* +V—v . V—v ; & après avoir effacé dans le troisiéme terme +v—v, nous avons A+B . B :: V—*v* . V—v ; c'est-à-dire, la somme des masses, &c.

Troisiéme Cas. A . B :: v+*v* . V—v (11. *Arith.*) ajoutant comme dans les deux cas précédens (9. *Arith.*) A+B .

B :: v+v+V—v. V—v, effaçant dans le troisiéme terme v—v, nous aurons A+B . B :: V+v . V—v.

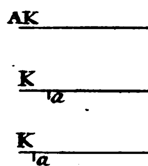
33. *Corollaire. Si la vitesse respective demeure la même & les masses les mêmes, la force du choc est aussi la même quelles que soient d'ailleurs les vitesses propres des mobiles & leurs directions.* Car la force du choc est égale ou proportionnelle à la quantité de mouvement que cette force détruit dans le choquant : or si les masses demeurent les mêmes & la vitesse respective la même, la quantité de mouvement que la force du choc détruit dans le choquant est la même ; cela est évident par les trois proportions précédentes ; donc la force du choc est aussi la même.

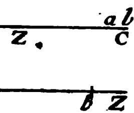
Nous allons voir que la proposition est aussi vraie pour tous les cas du choc oblique.

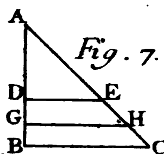
De la force du choc oblique.

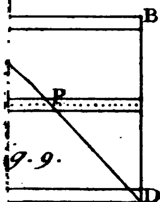
34. Pour déterminer la force du choc oblique, il faut encore avoir égard à la vitesse respective : quoique le plan d'incidence soit commun au choquant & au choqué, nous le concevrons néanmoins comme attaché au choqué B[*Fig.* 35. 36. 37.], & qu'il est représenté par la tangente CH. Toutes les parties du choquant & du choqué étant mûes parallelement à elles-mêmes, le plan CH le sera aussi. Supposons que les corps se rencontrent au point G, RS parallele à CH sera la situation du plan d'incidence ; & si du centre A on mene ADH perpendiculaire à ce plan ou au plan RS, les corps arrivant au point G se toucheront par les points C, D ; car les rayons BC & AD ou les lignes CBF, ADE étant paralleles & perpendiculaires au plan d'incidence, demeurent aussi paralleles pendant tout le tems du mouvement, & à l'instant du choc se confondent en une ligne droite qui joint les centres A & B ; or cette ligne est perpendiculaire par la construction, au plan ou à la tangente CH ; donc elle passe par le point d'attouchement commun aux deux corps (14. *Géom.*) ; donc les corps A, B se rencontreront par les points D, C, & les directions de ces points seront DG, CG. Cela fait, il est visible que

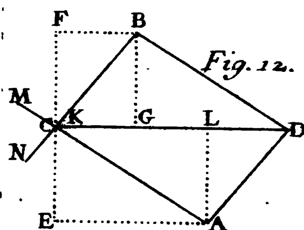
la

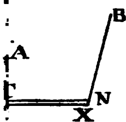

AK
K
a
K
a

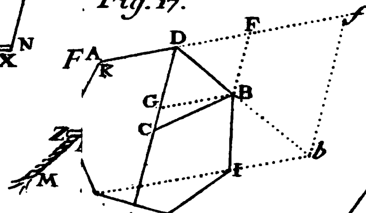

a b
Z
C
b Z

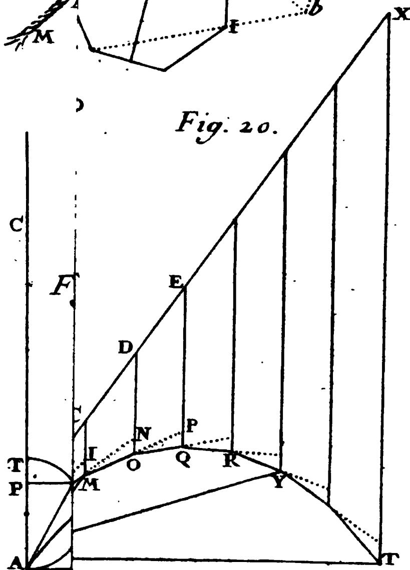

A
Fig. 7.
D
E
G
H
B
C

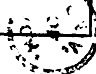

B
P
D

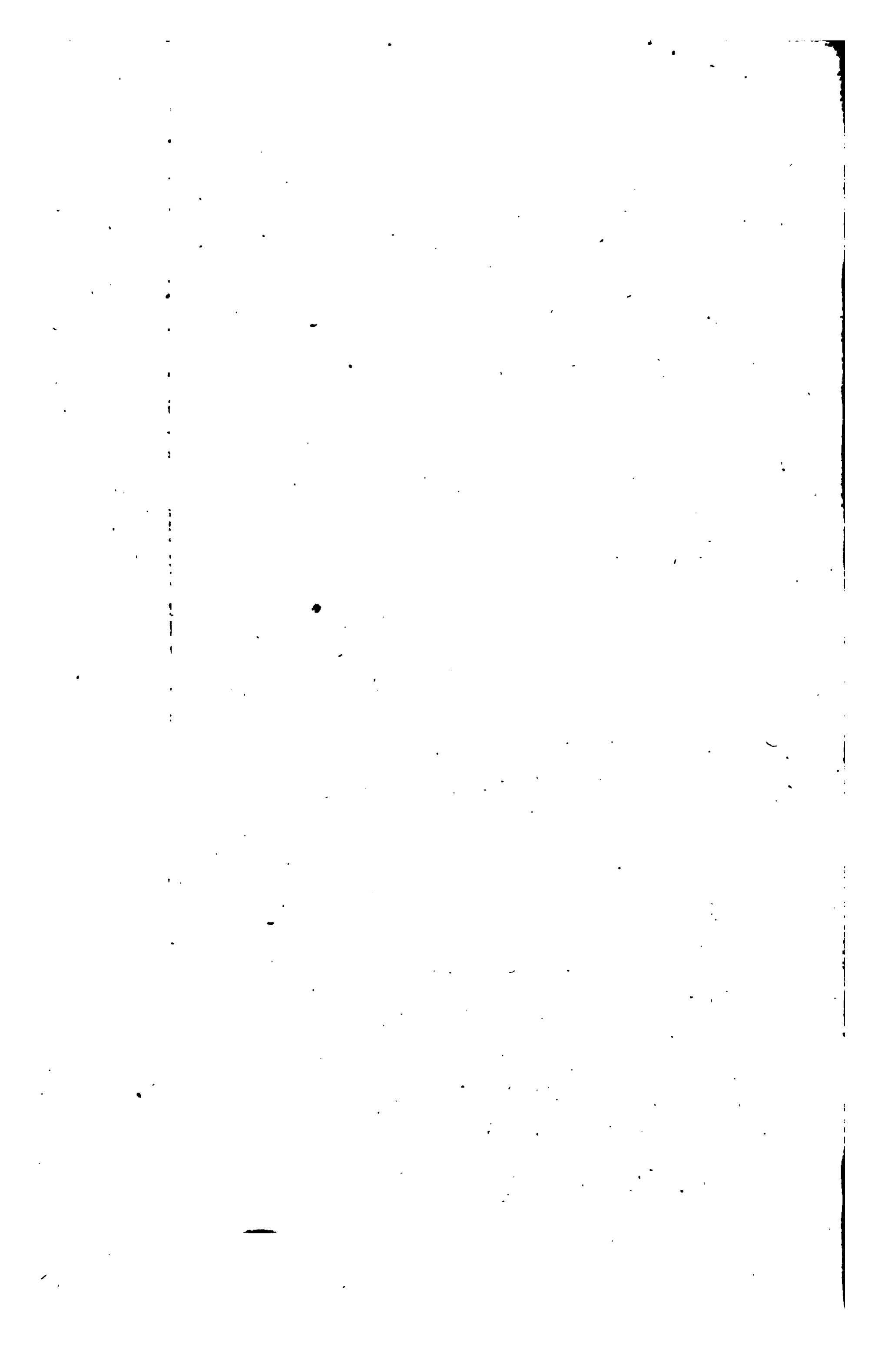

F
B
Fig. 12.
M
K
G
L
D
N
E
A


B
A
N
X


Fig. 17.
D
F
f
A
G
B
C
b
M


Fig. 20.
X
C
E
D
P
N
I
O
Q
R
T
P
M
Y
A
T





la direction DG du choquant A étant oblique au plan d'incidence RS, [*Fig. 35.*] sa vitesse est décomposée à l'instant du choc en vitesse parallele & vitesse perpendiculaire à ce plan (*Liv.* I. 74.), & que [*Fig. 36. 37.*] les directions des deux mobiles étant obliques, sont aussi décomposées l'une & l'autre; de sorte que les vitesses absolues étant exprimées par DG, CG, les vitesses perpendic. sont représentées par DE, CF, & les vitesses parall. par EG, FG des côtés des rect. EL, FM (*Liv.* I. 74.); il est certain que par les vitesses paralleles les corps ne font que glisser l'un sur l'autre, & qu'elles sont inutiles à la force du choc; il reste donc que cette force soit l'effet des vitesses perpendiculaires de même que dans le choc direct; donc dans le choc oblique comme dans le choc direct, il faut déterminer la force qui le produit, par la vitesse respective, quelles que soient les vitesses perpendiculaires propres des mobiles: or [*Fig. 35.*] la vitesse respective est égale à la vitesse perpendiculaire du corps A exprimée par DE (*Liv.I.* 24.) & [*Fig. 37.*], où les corps vont l'un contre l'autre, cette vitesse est exprimée par la somme des vitesses perpendiculaires DE, CF (22); mais [*Fig. 36.*] où le plan d'incidence fuit le corps A, la vitesse respective est seulement égale à la différence des vitesses DE, CF (22): c'est-à-dire, que dans les trois figures la vitesse respective est exprimée par LM; par conséquent selon la proposition précédente pour avoir la force du choc, il faut faire la proportion *la somme des masses* A+B *est au choqué* B, *comme la vitesse respective* LM *est à la vitesse que le choquant* A *perd dans le choc.*

2°. *Il est évident que dans le cas où le corps* B *est choqué en repos* [Fig. 35.], *la force du choc direct est à la force du choc oblique comme le sinus total est au sinus de l'angle d'incidence* DCE: car la force du corps A étant exprimée par DC, s'il choquoit directement le corps B, la force du choc seroit proportionnelle à DC; mais lorsqu'il le choque obliquement elle est seulement proportionnelle à DE ou à CL côté du rectangle EL: or si du point C comme

centre & avec le rayon DC, on décrit l'arc de cercle DF, DC sera le sinus total, & DE le sinus de l'angle d'incidence DCE ; donc la force du choc direct est à la force du choc oblique, &c.

CHAPITRE II.

Des loix du choc.

35. PAR les loix du choc on détermine les vitesses, les directions, & les quantités de mouvement des mobiles après le choc. Le choc est direct ou oblique, les corps sont sans ressort ou à ressort.

Regle générale pour le choc direct des corps mous sans ressort.

36. On suppose que les vitesses propres, & les directions des mobiles avant le choc sont connues, de même que les masses. Il faut faire la proportion, *la somme des masses* A+B *est à celle du choqué* B, *comme la vitesse respective est à celle que le choquant* A *perd par la force du choc* (32) ; cette vitesse étant retranchée de celle du choquant avant le choc, le reste est la vitesse commune avec laquelle les corps sont mûs après le choc suivant la direction du choquant A (20).

Exemple I. Supposons que le corps A qui a 2 de masse & 14 degrés de vitesse, choque le corps B en repos, lequel à 5 de masse. La somme des masses est 7, & la vitesse respective 14 (*Liv. I.* 24.) ; cela posé suivant la regle, nous avons $7 . 5 :: 14 . x = \frac{14 \times 5}{7} = 10$; c'est-à-dire, que le corps A perd 10 deg. de vitesse, lesquels étant retranchés de la vitesse 14 du corps A, le reste 4 est la vitesse commune avec laquelle les corps sont mûs ensemble après le choc suivant la direction du corps A avant le choc (20).

Corollaire. Il suit que si le choqué B est infiniment grand par rapport au choquant A, celui-ci perdra sensiblement toute sa vitesse ; car les deux premiers termes de la proposition sont égaux, puisqu'ils ne different que d'un infiniment petit ; donc les deux derniers termes sont aussi égaux ; donc la vitesse perdue x est égale à la vitesse du choquant A.

Exemple II. Supposons que les corps sont mûs d'un même côté, le corps A avec une vitesse de 17 degrés, & le corps B avec une vitesse de 3 degrés, les masses étant supposées encore 2 & 5. La vitesse respective dans l'hypothèse présente, est égale à la différence des vitesses propres, c'est-à-dire 14 (*Liv. I.* 22,), & la somme des masses est encore 7 comme dans le premier exemple. Nous aurons donc $7 . 5 :: 14 . x = \frac{14 \times 5}{7} = 10$, c'est-à-dire, que le corps A perdra 10 degrés de sa vitesse, lesquels étant retranchés de sa vitesse 17 avant le choc, le reste 7 est la vitesse commune des corps après le choc, lesquels sont mûs suivant leur première direction. (20)

Exemple III. Les corps A & B sont mûs directement l'un contre l'autre avec des vitesses 10 & 4 qui sont en raison réciproque des masses 2 & 5, en sorte que 10.4::5.2. La vitesse respective dans cette hypothèse est égale à la somme des vitesses propres 10 & 4, c'est-à-dire, égale à 14. La somme des masses est 7 ; donc suivant la regle nous aurons $7 . 5 :: 14 . x = \frac{14 \times 5}{7} = 10$, c'est la vitesse que le choquant A perd dans le choc, laquelle étant retranchée de sa vitesse 10 avant le choc, le reste qui est nul, fait connoître que le corps A après le choc est sans vitesse, c'est-à-dire, que les corps doivent être en repos : ce qui est d'ailleurs évident, car les forces ou les quantités de mouvement avec lesquelles les corps se choquent, sont égales (*Liv.I.*35.), elles sont de plus directement opposées ; donc elles se détruisent entierement par la force du choc (17).

Exemple IV. Les corps A & B sont mûs l'un contre

l'autre, le corps A avec 12 degrés de vitesse, & le corps B avec 2 ; les masses étant encore 2 & 5. La vitesse respective est 14 (22), & la somme des masses 7. Nous aurons $7 . 5 :: 14 . x = \frac{14 \times 5}{7} = 10$, c'est-à-dire, que le corps A perd 10 degrés de sa vitesse par la force du choc, lesquels étant retranchés de sa vitesse 12 avant le choc, le reste 2 fait connoître que les corps seront mûs dans la direction du plus fort qui est A avec deux degrés de vitesse. Après avoir déterminé la vitesse commune des corps après le choc, on aura leurs quantités de mouvement en multipliant les masses par les vitesses.

37. On trouveroit la vitesse commune des deux corps en divisant la somme des mouvemens ou leur différence par la somme des masses.

Regle générale pour le choc direct des corps à ressort parfait.

38. 1°. Il faut trouver la vitesse commune comme dans le choc des corps sans ressort, & l'écrire avec le signe + pour le choquant A & pour le choqué B. 2°. En cherchant la vitesse commune de la maniere expliquée dans la regle générale pour le choc des corps sans ressort ; il faut remarquer la vitesse que le choquant A perd par la force du choc, & l'écrire avec le signe —, au-dessous de la vitesse commune de ce corps ; & après avoir retranché cette vitesse perdue de la vitesse respective, écrire le reste avec le signe +, au-dessous de la vitesse commune du corps B. 3°. La somme de ces vitesses pour le corps B, & la différence pour le corps A sont les vitesses avec lesquelles ces corps sont mûs après le choc ; sçavoir le corps B dans le sens de la vitesse commune, & le corps A dans ce même sens, c'est-à-dire, suivant sa direction avant le choc, si la vitesse commune marquée du signe + est plus grande que celle qui est affectée du signe — ; mais si celle-ci est plus grande, le corps A retournera en arriere.

Démonstration des trois articles de la regle. 1°. Puisque durant la compression le ressort est tenu assujetti de maniere qu'il ne peut ni retarder le choquant, ni accélerer le choqué (21. 22.), il s'ensuit que durant ce premier tems les corps prennent la même vitesse que s'ils étoient sans ressort; c'est pourquoi la regle prescrit de trouver leur vitesse commune, & de la marquer du signe + pour les deux corps, parce qu'elle est dirigée dans le même sens, c'est-à-dire, dans le sens du choquant (20).

2°. Puisque le ressort se comprime avec une force égale à celle que le choquant perd par la force du choc, (25) il redonne au choquant toute la vitesse qu'il a perdue à le comprimer (27); or cette vitesse est contraire à la vitesse commune, ou contraire à la vitesse primitive du choquant; c'est pourquoi il faut la marquer du signe —: ce qui reste à démontrer de ce second article de la regle, c'est qu'après avoir retranché de la vitesse respective, cette vitesse que le choquant A perd par la force du choc, laquelle est la même que celle que le ressort lui redonne, le restant est la vitesse que le corps B reçoit du ressort. Concevons que la vitesse respective est divisée en deux parties $V+v$, puisque c'est la vitesse respective qui fait la force du choc, la vitesse que le choquant A perd, est une partie de cette vitesse, qu'elle soit exprimée par V, l'autre partie sera exprimée par v. Cela posé, nous avons $A+B . B :: V+v . V$ (32); donc si des antécedens on retranche les conséquens, & qu'on compare les restes aux conséquens (9. *Arith.*), la proportion est réduite à celle-ci $A.B :: v.V$, c'est-à-dire, que les parties de la vitesse respective, l'une V qui est détruite, & l'autre v qui ne l'est point, sont entr'elles réciproquement comme les masses A & B (3. *Arith.*): or le ressort communique au choquant & au choqué des vitesses qui sont aussi entr'elles réciproquement comme les masses A & B, puisque le ressort leur donne des quantités égales de mouvement (27); donc les vitesses que le ressort donne sont dans la même raison que les parties V, v de la vitesse respective, & les réprésentent (14. *Arith.*):

or la vitesse que le ressort donne au choquant A est égale à la partie V qui est détruite (27); il est donc nécessaire que la vitesse que le même ressort donne au choqué B soit égale à l'autre partie v qui n'est point détruite (5. *Arith.*), c'est pourquoi la regle prescrit de retrancher de la vitesse respective celle que le choquant perd par la force du choc, & d'écrire le restant au-dessous de la vitesse commune du choqué, & de la marquer du signe +, parce qu'elle est dans le sens de la vitesse commune. Le troisiéme article de la regle n'a pas besoin d'être démontré après ce qui vient d'être dit.

39. Il paroît que pour trouver les vitesses que le ressort donne au choquant & au choqué, il faut partager la vitesse respective dans la raison réciproque des masses : or c'est ce que l'on fait par une simple soustraction, en suivant le second article de la regle.

Exemple I. Le corps A qui a 3 de masse & 16 degrés de vitesse, choque le corps B en repos, dont la masse est 5. La somme des masses est 8., & la vitesse respective 16; je dis donc $8 . 5 :: 16 . x = \frac{5 \times 16}{8} = 10$, c'est la vitesse que le choquant A perd par la force du choc, laquelle étant retranchée de la vitesse respective, le reste 6 est la vitesse commune que je marque ainsi du signe +.

$$\begin{array}{l} A+6 \,..\, B+6 \\ \;\; -10 \,...\, +6 \\ \hline A-4 \,..\, B+12 \end{array}$$

2°. J'écris la vitesse 10 détruite par la force du choc, au-dessous de la vitesse commune du corps A avec le signe —, & après l'avoir retranchée de la vitesse respective 16, jécris le reste 6 au-dessous de la vitesse commune du corps B avec le signe +. 3°. La différence —4 de la vitesse commune à la vitesse de ressort du corps A, & la somme de ces vitesses pour le corps B, sont les vitesses avec lesquelles ces corps sont mûs après le choc en sens contraires.

40. *Si le choquant* A *est plus grand que le choqué* B, *il est mû après le choc suivant sa premiere direction.* Car comme la somme des masses est plus que double de la masse du

choqué B, ainsi la vitesse respective qui est égale à celle du choquant, est plus que double de la vitesse qu'il perd par la force du choc (32) ; donc la vitesse restante est plus grande que la vitesse détruite ; mais le ressort ne détruit dans le choquant qu'une partie de sa vitesse égale à celle qu'il perd par la force du choc (27) ; donc après cette double perte, il lui reste encore une partie de sa vitesse primitive avec laquelle il est mû suivant sa premiere direction.

41. Si le choquant est égal au choqué, il perd par la force du choc la moitié de sa vitesse (32) : or le ressort en se rétablissant lui redonne cette vitesse en sens contraire, le choquant reste donc en repos, & le choqué prend toute la vitesse du choquant, 1°. la moitié par la force du choc, 2°. l'autre moitié par la force du ressort.

42. Si le choquant est moindre que le choqué, il perd par la force du choc plus de la moitié de sa vitesse (32) ; la vitesse restante est donc moindre que celle que le ressort lui redonne (27) ; c'est pourquoi le choquant retourne en arriere.

43. Si le choquant est comme infiniment petit par rapport au choqué, il perd sensiblement toute sa vitesse par la force du choc (32) ; donc le ressort qui lui redonne cette vitesse en sens contraire (27), le fait retourner en arriere avec sa premiere vitesse.

Exemple II. Lorsque les corps sont mûs suivant la même direction, les masses sont 3 & 5, les vitesses 22 & 6. La vitesse respective sera encore 16, & la somme des masses 8. Donc $8 . 5 :: 16 . x = \frac{5 \times 16}{8} = 10$; c'est la vitesse que le choquant A perd par la force du choc, laquelle étant retranchée de la vitesse propre 22 du corps A, le reste 12 est la vitesse commune des deux corps, que je marque du signe de +.

2°. J'écris la vitesse détruite 10 au-dessous de la vitesse commune du corps A avec le signe —; & après avoir retranché cette vi-

$$\begin{array}{lll} A+12 & \ldots & B+12 \\ -10 & \ldots & +\ 6 \\ \hline A+\ 2 & \ldots & B+18 \end{array}$$

tesse de la vitesse respective 16, j'écris le reste 6 sous la vitesse commune du corps B avec le signe +. Les vitesses après le choc sont donc 2 & 18 dans le même sens.

44. Si le choquant est plus grand ou même égal au choqué, il sera mû après le choc, suivant sa premiere direction. Car dans ces deux cas il perdra moins de la moitié de sa vitesse par la force du choc (32), puisque la vitesse propre de ce corps est plus grande que la vitesse respective.

Exemple III. Lorsque les corps sont mûs l'un contre l'autre avec des vitesses en raison réciproque des masses, les corps sont réfléchis avec leur premiere vitesse. Car ils perdent l'un & l'autre toute leur vitesse par la force du choc : (17) or le ressort la leur donne, mais en sens contraires ; (27) donc les corps sont réfléchis avec leurs premieres vitesses. Soient les masses 3 & 5, les vitesses 10 & 6, la vitesse respective sera 16 & la somme des masses 8 ; donc selon la proportion $8 . 5 :: 16 . x = \frac{16 \times 5}{8} = 10$, c'est-à-dire, que le corps A perd toute sa vitesse ; donc la vitesse commune est nulle, donc ces corps resteroient en repos s'ils étoient sans ressort ; mais suivant la regle il faut écrire pour le corps A la vitesse détruite 10 avec le signe —, & après l'avoir retranchée de la vitesse respective 16, écrire pour le corps B le reste 6 avec le signe + ; donc le corps A retourne en arriere avec la vitesse —10, & le corps B est mû suivant la direction du corps A avant le choc, avec la vitesse +6. Ces corps sont donc réfléchis avec leurs premieres vitesses.

Exemple IV. Si les vitesses ne sont point dans la raison réciproque des masses, on trouve leurs vitesses après le choc par la regle générale. Supposons que les masses sont 3 & 5, les vitesses 12 & 4 ; la vitesse respective est encore 16 & la somme des masses 8 ; donc le choquant A perd 10 degrés de sa vitesse ; donc la vitesse commune est 2 que je marque du signe +.

2°. J'écris la vitesse perdue 10 au-dessous de la vitesse commune du corps A avec le signe —, & la différence 6 de cette vitesse à la vitesse respective, au-dessous de la vitesse	A + 2 .... B + 2 — 10 .... + 6 A — 8 .... B + 8

commune du corps B avec le signe +; & les corps sont réfléchis avec des vitesses égales.

On omet plusieurs cas particuliers, on peut les voir dans les *Principes*.

Du choc direct de plusieurs corps posés de suite sur une même ligne droite.

45. Plusieurs boules d'yvoire toutes égales étant posées sur un plan horizontal, de maniere qu'une ligne droite les enfile par leurs centres, & qu'elles se touchent, l'experience montre que si la boule *b* [*Fig.* 38.] choque la boule *c*, la derniere *g* se détache de la file, & les autres demeurent en repos; si deux boules *a*, *b* [*Fig.* 39.] vont choquer ensemble la boule *c*, les deux dernieres de la file *f*, *g* se détachent, & les autres demeurent en repos, &c. Pour expliquer cet effet, nous remarquerons que si les boules ne se touchoient point, la boule *b* [*Fig*, 38.] perdroit tout son mouvement en choquant la boule *c*, & la boule *c* le perdroit en choquant la boule *d*, en sorte qu'il n'y auroit que la derniere *g* qui seroit mûe avec la vitesse de la boule *b* (41): or quoique les boules se touchent, le même effet doit arriver; car lorsque la boule *b* choque la boule *c*, celle-ci prend la figure d'un sphéroïde applati, elle se sépare par sa partie antérieure de la boule *d*, & de la boule *b* par sa partie postérieure; donc la boule *c* reçoit toute la vitesse de la boule *b*, comme si elle étoit seule, sans que la boule *d* en reçoive aucune partie; ainsi 1°. la boule *b* demeure en repos. La boule *c* choque ensuite la boule *d*, laquelle se sépare à son tour de la boule *f* par sa partie antérieure, & de la boule *c* par sa partie postérieure; elle reçoit donc toute la vitesse de la boule *c*, laquelle demeure en repos,

& ainſi de ſuite, de ſorte qu'il y a autant de chocs particuliers qu'il y a de boules qui précedent la derniere; c'eſt pourquoi chaque boule reçoit, & perd enſuite la viteſſe qu'elle a reçue, il n'y a donc que la derniere qui eſt mûe avec la viteſſe de la premiere.

Si les boules *a*, *b* [*Fig.* 39.] vont choquer enſemble la boule *c*, il doit ſe détacher deux boules de la file, & les autres demeureront en repos. Quoiqu'il paroiſſe d'abord qu'il n'y a qu'un choc produit par ces deux boules à la fois, il y en a réellement deux, c'eſt-à-dire, que chaque boule eſt choquée deux fois. Car lorſque la boule *b* touche la boule *c*, elle ſe ſépare par la partie poſtérieure de la boule *a*, en ſorte que la boule *c* reçoit tout le mouvement de la boule *b* avant que la boule *a* perde rien du ſien: ainſi la boule *b* étant en repos par la perte qu'elle a fait de ſon mouvement, eſt choquée par la boule *a*, & eſt miſe une ſeconde fois en mouvement, & choque par conſéquent une ſeconde fois la boule *c*, la boule *c* choque auſſi une ſeconde fois la boule *d*, &c. or puiſqu'il y a deux chocs pour chaque boule, il s'enſuit qu'il doit y en avoir deux qui ſe détachent & les autres doivent demeurer en repos.

PROPOSITION II.

46. *Dans le choc direct des corps à reſſort parfait, la viteſſe reſpective eſt la même avant & après le choc.*

Il faut démontrer que les corps après le choc ſe ſéparent avec la même viteſſe qu'ils ſe ſont approchés avant. Si les corps étoient mûs après le choc avec la ſeule viteſſe de reſſort, il eſt certain qu'ils s'éloigneroient avec une viteſſe égale à la viteſſe reſpective; car le reſſort la partage dans la raiſon réciproque des maſſes (38. 39); d'ailleurs par cette viteſſe les corps ſe fuient: or quoique les viteſſes des mobiles après le choc ſoient compoſées de la viteſſe de reſſort & de la viteſſe commune, cependant la viteſſe reſpective n'en eſt point altérée: car lorſque deux corps ſe fuient, ſi l'on augmente la viteſſe de l'un de tout autant que l'on retarde celle de l'autre, les corps s'éloigneront encore

avec la même vitesse : si le choqué B reçoit deux degrés de vitesse suivant sa direction, & que le choquant A reçoive ces deux degrés aussi dans le même sens, la vitesse du ressort du corps A sera diminuée de deux degrés ; ainsi la vitesse respective sera encore la même : or la vitesse commune augmente la vitesse de ressort du choqué B, & elle diminue de tout autant la vitesse de ressort du choquant A, ce qui est évident par la regle générale (38); donc la vitesse commune n'altere point la vitesse respective ; elle est donc la même après & avant le choc.

Loi du choc oblique des corps sans ressort.

47. Supposons que les corps A, B étant mûs suivant les directions DG, CG obliques au plan d'incidence RS, se choquent au point G [*Fig.* 41, 42], les vitesses propres étant exprimées par DG, CG, & les vitesses perpendiculaires par LG, MG ; la vitesse respective qui fait le choc, est représentée par LM, somme ou différence de ces vitesses, comme il a été expliqué art. 34 ; mais dans la *Fig.* 40, où le corps B est choqué étant en repos, la vitesse respective est égale à la vitesse perpendiculaire du corps A. Cela étant, pour avoir les vitesses & les directions des mobiles après le choc, il faut faire la proportion : La somme des masses est au choqué B comme la vitesse respective est à la vitesse que le choquant A perd par la force du choc. Supposons qu'elle soit égale à LP, GP sera la vitesse commune (36) ; si on prend G*p*=GP, G*e*=GE, G*f*=GF, qu'on décrive les rectangles *ep*, *fp*, qu'on tire les diagonales G*b*, G*a* elles représenteront les directions & les vitesses des corps A & B après le choc : car ces corps sont poussés à la fois suivant G*p*, G*e*, G*f*, & ont des vitesses exprimées par ces lignes, lesquelles se composent en une, qui est exprimée par la diagonale G*a* pour le corps A, & par la diagonale G*b* pour le corps B (*Liv.* I. 64) dans la *Fig.* 40, où le corps B n'a point de vitesse parallele, il suit la direction de la vitesse perpendiculaire exprimée par G*p*.

48. Comme les vitesses absolues perpendic. & paralleles des mobiles sont exprimées par des lignes, pour avoir par le moyen de la proportion ci-dessus indiquée la vitesse perpendiculaire commune aux deux corps, il faut aussi exprimer les masses par des lignes, & trouver ensuite une quatriéme proportionnelle à la ligne qui exprime la somme des masses, à celle qui exprime la masse du corps B, & à LM qui représente la vitesse respective, & elle sera la vitesse que le choquant perd par la force du choc.

Loi du choc oblique des corps à ressort.

49. 1°. Les vitesses des mobiles étant encore DG, CG, & les vitesses perpendiculaires LG, MG, & la vitesse respective LM [*Fig.* 43, 44, 45], & LP la vitesse que le choquant A perd par la force du choc, GP sera la vitesse commune. 2°. Si on prend G*n* égale à GP — PL ou à PL — GP, c'est-à-dire, égale à la différence de la vitesse commune à celle que le choquant perd par la force du choc, ce sera la vitesse perpendiculaire de ce corps : si on prend aussi G*h* = GP + PM, c'est-à-dire, la somme de la vitesse commune, & de l'excès de la vitesse respective LM, sur la vitesse LP que le choquant perd dans le choc, ce sera la vitesse perpendiculaire du corps B après le choc. 3°. Si on prend G*e* = GE, G*f* = GF qui représentent les vitesses paralleles, que l'on construise les rectangles *en*, *fh* les diagonales G*a*, G*b* sont les vitesses & les directions des corps A & B après le choc : tout cela est évident par la regle générale, & par ce qui a été dit de la force du choc oblique, & par l'art. 64 du premier Livre.

Du choc des corps à ressort imparfait.

50. L'expérience fait voir qu'il y a peu de corps à ressort parfait, sur-tout parmi les corps grossiers & sensibles : or il est évident que les corps à ressort imparfait ne suivent point dans le choc la loi des corps à ressort parfait ; mais qu'ils s'en écartent d'autant plus que leur ressort est imparfait. On connoît qu'un ressort est parfait lorsque deux

corps après le choc se séparent avec la même vitesse qu'ils se sont approchés ; c'est-à-dire, lorsque la vitesse respective est la même après & avant le choc (46) : de sorte que si le ressort ne rétablit point cette vitesse, mais qu'elle soit moindre après, qu'avant le choc, on est assuré que le ressort est d'autant plus imparfait que cette vitesse après le choc est moindre ; si la vitesse respective après le choc n'est que la moitié, le tiers, le quart de la vitesse respective avant le choc, on peut dire que la force du ressort imparfait n'est que la moitié, le tiers, le quart, &c. de celle du ressort parfait, puisqu'elle produit un effet deux, trois, quatre fois moindre.

CHAPITRE III.

Du choc qui produit la reflexion & la réfraction.

51. LES deux plus belles parties de la Science qui traite du Mouvement de la Lumiere, je veux dire la *Catoptrique* & la *Dioptrique*, supposent les premiers principes de la *réflexion* & de la *réfraction* : or quoique la lumiere ne suive pas de tout point les loix de la réflexion & de la réfraction des corps grossiers, néanmoins les premieres notions que nous allons donner de ces deux especes de mouvement, pourront aider à concevoir comment est-ce que les particules de lumiere qui nous sont invisibles sont réfléchies à la rencontre d'une surface qu'elles ne peuvent pénétrer, & ce qui peut leur arriver lorsqu'en traversant un nouveau milieu, elles se détournent de leur premiere direction. Voyez les *Recherches Physico-Mathématiques sur la réflexion des Corps*, par M. de Mairan, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, *ann.* 1722 & 1723, d'où la plûpart des choses contenues dans ce Chapitre ont été tirées.

Du Mouvement de Réflexion.

52. Le mouvement de réflexion consiste en ce qu'un

corps venant à rencontrer un obstacle qu'il ne peut surmonter, est renvoyé & retourne en arriere. Si on laisse tomber une bale d'yvoire sur un carreau, elle rebondit, & revient par le chemin qu'elle a suivi en tombant : c'est ce retour qu'on appelle réflexion ; lorsque deux corps à ressort se choquent directement en allant l'un contre l'autre, avec des quantités égales de mouvement, ils retournent aussi en arriere & son réfléchis ; si le choquant est d'une petitesse extrême par rapport au choqué, il est réfléchi avec sa premiere vitesse, du moins sensiblement, & le corps choqué ne change point sensiblement de place : ainsi le ressort est une cause qui peut réfléchir les corps ; mais n'y a-t-il de réflexion que par le ressort ? Un corps parfaitemeut dur venant à rencontrer un plan inébranlable sera-t-il réfléchi ? C'est le sentiment de M. Descartes, lorsque dans sa Dioptrique il explique la réflexion d'une bale qui va frapper la Terre suivant une direction oblique, sans supposer de ressort ni dans la bale, ni dans la surface qu'elle choque. Mais M. de Mairan prouve par plusieurs raisons que sans le ressort il n'y auroit point de réflexion dans le cas d'un corps réfléchissant inébranlable, tel que M. Descartes l'a supposé : car un corps inébranlable doit être regardé comme une masse infinie qui est en repos ; or selon la loi générale du choc des corps sans ressort, le corps qui choque doit perdre sensiblement toute sa vitesse, & la vitesse commune des deux corps après le choc ne differe point d'un repos sensible (*Coroll. art. 36*) ; c'est pourquoi quelle que soit la vitesse du choquant avant le choc, il n'est point réfléchi à la rencontre d'un corps infini en masse, lorsqu'il le choque directement en repos.

2°. Si la direction du choqant avant le choc est oblique au plan d'incidence, elle se décompose en deux forces, l'une perpendiculaire, & l'autre parallele : la force perpendiculaire se consume, comme dans le cas précédent, à presser le plan, & parce que le plan n'a aucune vertu pour la rétablir, le corps sera mû le long du plan par la force parallele (*Liv. I. 74*).

3°. Si la réflexion des corps, & la conservation du mouvement après le choc subsistent indépendamment de la compression & de la restitution des parties des corps qui se choquent, il n'y a point de différence par rapport à la réflexion entre les corps supposés sans ressort, & les corps doués de ressort : l'élasticité devient donc absolument superflue, & de nulle propriété dans la nature.

4°. Si on a recours à l'expérience pour décider cette question, on trouve que tous les corps qui sont réfléchis à la rencontre d'un plan ont du ressort, & que le degré de réflexibilité répond au degré d'élasticité, en sorte que les corps qui n'ont point de ressort ne sont point réfléchis; car s'ils sont mous ils consument leur force à pousser le plan, & à s'applatir; & s'ils sont durs, on trouve encore que la dureté n'est point le principe de la réflexion, puisqu'un corps n'est pas d'autant plus réflexible qu'il est plus dur : ainsi l'yvoire se réflechit avec plus de force & de promptitude que le fer, quoique le fer soit plus dur que l'yvoire.

53. Puisque la vertu élastique est une force éxistante dans la nature, qu'elle est capable de produire la réflexion des corps, rien n'empêche qu'on n'y rapporte ce mouvement, sinon comme à une cause générale, du moins comme à une cause qui suffit & qui est équivalente à toute autre qui seroit destinée à la production de cet effet.

54. Dans le mouvement de réflexion il faut remarquer la ligne d'incidence, c'est la ligne suivant laquelle le corps est mû lorsqu'il va choquer le plan; la ligne de réflexion est celle qu'il suit lorsqu'étant réflechi il s'éloigne du plan : telles sont les lignes AC, CE. [*Fig.* 46.] Le plan d'incidence & de réflexion est celui que le corps va choquer, & à la rencontre duquel il est réflechi; la ligne droite LL représente ce plan, le point d'incidence est celui où le corps choque le plan, comme le point C; le point de réflexion est celui où la réflexion se fait. L'angle d'incidence est formé par le plan, & la ligne d'incidence comme l'angle ACB; l'angle de réflexion est formé par le même plan, & la ligne de réflexion comme l'angle ECD. Il y a enfin la perpen-

diculaire d'incidence & de réflexion comme CH. Les angles ACH, ECH formés par la perpendiculaire CH, & les lignes d'incidence & de réflexion peuvent être appellés complémens des angles d'incidence & de réflexion.

Il y a des auteurs qui appellent *Angles d'incidence & de réflexion*, ceux que nous venons de nommer leurs complémens.

55. De même que le choc peut être direct ou oblique, la réflexion peut se faire aussi suivant la perpendiculaire ou l'oblique au plan d'incidence.

56. *Dans le choc direct toute la force du choquant est employée à bander le ressort, supposé qu'il soit parfait.* Car pendant qu'il se comprime il est tenu assujetti, de maniere que par la réaction il ne détruit dans le choquant aucune partie de son mouvement (22.); d'ailleurs le plan d'incidence est inébranlable, ou ce qui revient au même, il appartient à une masse infiniment plus grande que n'est celle du choquant; donc le choquant perd sensiblement toute sa vitesse dans le choc (32); or le ressort parfait se comprime avec une force égale à celle que le choquant perd dans le choc (25.); donc, &c.

57. Dans le choc oblique la force du choquant est décomposée en deux efforts, l'un parallele, l'autre perpendiculaire au plan d'incidence (*Liv. I.* 74.): l'effort perpendiculaire applique le corps contre le plan, & comprime le ressort; mais l'effort parallele n'étant point empêché, fait rouler ou glisser le corps sur le plan, tandis que le ressort se comprime: d'où l'on voit que dans le choc oblique le point de réflexion n'est pas le même que le point d'incidence.

58. Si le plan d'incidence est mathématique, c'est-à-dire; parfaitement poli, 1°. le corps doit glisser, on suppose qu'il est sphérique. Car la direction de la force horisontale ou parallele passe par le centre du corps; cette force est donc également appliquée à toutes les parties du globe, elles sont donc toutes déterminées à suivre des directions paralleles à celle du centre; d'ailleurs le plan étant parfaitement

parfaitement poli, n'empêche point que les parties du globe ne suivent ces déterminations ; par conséquent le globe glisse sur le plan.

59. L'effort parallele demeure le même pendant la compression du ressort. 1°. Si on suppose qu'il n'y a qu'un choc, il est évident que l'effort parall. demeure dans son entier, puisque rien ne le détruit. 2°. Si on conçoit que durant la compression il y a plusieurs chocs, à chaque choc particulier le mouvement de la sphere se décompose en effort perpendiculaire & en effort parallele : l'effort parallele n'est point alteré par cette décomposition, il ne l'est pas non plus dans la composition du mouvement qui résulte ensuite de cet effort & de l'effort perpendiculaire diminué ; l'effort parallele n'est point non plus diminué dans le second choc, lorsque le mouvement se décompose une seconde fois ; donc l'effort parallele demeure le même pendant la durée du choc.

60. *Tout l'effort perpendiculaire qui résulte de la force du mobile est employée à comprimer le ressort.* Car durant la compression le corps ne fait que glisser sur le plan, & le touche toujours par la même partie ; donc le ressort est continuellement comprimé dans le même sens comme dans le choc direct. Donc, &c. (56)

61. *Si le plan est raboteux le corps doit rouler pendant la compression du ressort.* Car la sphere s'engage en partie dans les cavités de la surface, ce qui en retarde les parties inférieures, tandis que les parties supérieures peuvent obéir à tout l'effort de la force qui leur est appliquée : or les inégalités du plan étant un obstacle à l'effort parallele du mobile, sa vitesse horizontale est diminuée : la compression se fait aussi sur différentes parties de la Sphere, sçavoir sur celles par lesquelles elle s'applique au plan à mesure qu'elle roule ; mais lorsque la partie qui est actuellement comprimée cesse de toucher le plan, elle doit se rétablir dans son premier état avant que l'effort perpendiculaire acheve de comprimer le ressort. Cela étant ainsi, comment est-ce que le ressort redonnera toute la force avec

laquelle il a été comprimé, ainsi que l'expérience confirme qu'il redonne effectivement.

M. de Mairan qui se propose la difficulté, donne une réponse non moins solide qu'ingénieuse, qui leve la difficulté & y satisfait pleinement. En voici le sens. Concevons un cerceau de baleine ou d'acier trempé qui soit pressé contre le plan LL [*Fig*. 47.] par un effort qui puisse l'applatir & lui faire toucher le plan dans la partie AB ; cette partie ne peut s'approcher du centre que le cerceau ne se renfle vers ANE, & que la partie G ne s'en éloigne. Cela posé que le cerceau après avoir touché le plan LL par sa partie AB, le touche dans la partie AE, la partie AB cessant de toucher le plan s'élancera vers R autant en deça du point K qu'elle s'en étoit éloignée en delà vers le centre C; c'est-là une propriété du ressort qui consiste à faire les mêmes vibrations que le pendule, & à s'éloigner également de part & d'autre du repos; donc la compression finissant en AB, la partie AGE qui par sa tension avoit été contrainte de s'éloigner du centre C, s'en approchera, mais elle ne s'arretera pas au repos en N, elle passera audelà comme en M, tant par sa force propre que parce que ce mouvement est favorisé par le rétablissement de la partie AB; la partie AGE sera donc comprimée par l'effort perpendiculaire qui applique actuellement le cerceau au plan, & par l'effort qui avoit comprimé la partie AB; donc le roulement sur le plan n'empêche point qu'au dernier instant le cerceau ou le globe ne soit comprimé par tout l'effort perpendiculaire qui a agi durant la compression.

PROPOSITION III.

62. *Si un corps de figure sphérique & à ressort parfait choque un plan inébranlable & parfaitement poli, il est réflechi avec sa premiere vitesse, de maniere que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.*

1°. Si l'incidence est perpendicul. au plan, la force du mobile est toute employée à comprimer le ressort (56): or le ressort se rétablit avec une force égale à la compression,

d'ailleurs la restitution étant directement opposée à la compression, se fait aussi le long de la perpendiculaire au plan; donc le corps est réflechi suivant la ligne d'incidence avec sa premiere vitesse; donc l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

2°. Si l'incidence est oblique au plan la force du mobile se décompose en deux efforts, l'un perpendiculaire, l'autre parallele au plan d'incidence; or le ressort se comprime par tout l'effort perpendiculaire (56); donc en se rétablissant, il redonne tout cet effort au mobile, mais en sens contraire: d'ailleurs l'effort parallele demeure le même durant la compression (*Liv. I.* 74.); donc ces deux efforts se composant en un seul, redonnent au mobile sa premiere vitesse, & parce que durant la restitution ils agissent dans des circonstances toutes semblables à celles de la compression, il s'ensuit que la ligne de réflexion sera située à l'égard du plan de la même maniere que la ligne d'incidence, par conséquent l'angle de réflexion doit être égal à l'angle d'incidence. Voici la même chose expliquée à l'aide d'une figure. Supposons que la diagonale AC du rectangle BH [*Fig.* 46.] exprime la force du mobile avant le choc, cette force dirigée suivant la même AC est décomposée au point C en deux efforts représentés par les côtés CB, CH; l'effort parallele CB fait avancer le mobile sur le plan, tandis que l'effort perpendiculaire comprime le ressort, mais parce que le chemin que le mobile fait durant cet intervalle sur le plan ne change rien ni dans sa direction ni dans les efforts qui en résultent, il s'ensuit que l'effet de la réflexion sera le même, si l'on suppose que le point de réflexion est le même que le point d'incidence C. Cela posé lorsque le ressort se rétablit, il redonne au mobile tout l'effort perpendiculaire CH qui a été consumé à le comprimer, d'ailleurs l'effort parallele BC est demeuré dans son entier; de sorte que le corps à l'instant de la réflexion est poussé à la fois suivant CH & CD avec des efforts exprimés par les mêmes CH, BC, c'est pourquoi si on prend CD=BC, le mobile sera poussé à la fois sui-

vant les côtés CH, CD du parallelogramme DH avec des efforts exprimés par ces côtés ; donc il en décrira la diagonale CE : or puisque les parallelogrammes BH, DH sont égaux en tout, il s'ensuit que les diagonales AC, CE sont non-seulement égales, mais qu'elles font les angles d'incidence ACB, & de réflexion ECD égaux.

Si le ressort est imparfait, il ne rétablit point l'effort perpendiculaire en entier, pour lors le côté vertical DE est moindre que le côté vertical AB ou CH, c'est pourquoi l'angle ECD est moindre que l'angle ACB.

Du choc qui produit la réfraction.

63. La réfraction consiste en ce qu'un corps qui passe obliquement d'un milieu dans un autre de différente densité, par exemple, de l'air dans l'eau est détourné de sa direction, & en prend une autre qui est située à droite ou à gauche de celle qu'il suivoit avant la rencontre du nouveau milieu. Ainsi si la boule A [*Fig.* 48.] est poussée obliquement suivant la direction AC contre la surface LL qui sépare le milieu Z d'avec le milieu X qui est plus ou moins dense, elle s'enfonce dans le milieu X en s'éloignant de sa premiere direction ACE : c'est ce détour que l'on appelle *mouvement de réfraction* ou simplement *réfraction*. Si au point d'incidence C on éleve la perpendiculaire HCI, elle est le terme d'où l'on commence à compter la réfraction ; ou plutôt c'est à la perpendiculaire HCI que l'on rapporte la quantité de cette réfraction : si la réfraction se fait vers M on dit que le corps se détourne en s'approchant de la perpendiculaire ; mais s'il se détourne vers N, on dit qu'il s'écarte de la perpendiculaire.

Dans la réfraction il faut considérer la surface réfringente LL, le point d'incidence C qui est aussi celui de réfraction, parce que la réfraction commence aussitôt que le mobile rencontre le nouveau milieu ; la ligne d'incidence ACE, la perpendiculaire d'incidence & de réfraction HCI ; la ligne de réfraction CM ou CN ; l'angle d'incidence ACL formé par la ligne d'incidence AC & la surface LL ;

l'angle de réfraction ICM ou ICN formé par la perpendiculaire HCI & la ligne de réfraction CM ou CN; l'angle rompu ECM ou ECN, l'angle d'inclinaison ACH formé par la ligne d'incidence AC & la perpendiculaire HCI; il y a des auteurs qui l'appellent angle d'incidence, & l'angle ECM ou ECN fait par la ligne d'incidence AC & la ligne de réfraction CM ou CN, angle de réfraction.

64. *Si le corps* A *de figure sphérique* [Fig. 49.] *tombe perpendiculairement sur la surface du nouveau milieu* X, *il n'y a point de réfraction;* car la direction du mobile étant perpendiculaire à la surface LL commune aux deux milieux, les parties du mobile semblablement situées à l'égard de cette direction trouvent la même résistance, sçavoir celles qui touchent le milieu Z dans ce milieu, & celles qui touchent le milieu X, aussi dans ce milieu; donc le corps n'est pas plus porté vers un endroit que vers un autre; donc il doit s'enfoncer sans s'écarter de sa direction.

65. *Mais si le corps* A *rencontre obliquement la surface* LL, *il sera détourné, & il y aura réfraction.* Car pour lors les parties semblablement situées à l'égard de la direction AD du mobile, étant les unes dans le milieu Z, & les autres dans le milieu X, trouvent des résistances inégales, puisque les milieux résistent inégalement; la force qui pousse le mobile est donc déterminée par cette inégalité de résistance à le pousser vers l'endroit où elle est moindre; donc le mobile se détourne de sa direction en entrant dans le milieu; ainsi il y a réfraction.

PROPOSITION IV.

66. *Si le corps* A *de figure sphérique choque obliquement le nouveau milieu* X *qui resiste davantage que le milieu* Z, *il se détourne en s'éloignant de la perpendiculaire* ACI [Fig. 50. 51.]

On peut supposer que le corps A est d'une extrême petitesse & comme infiniment petit, ensorte qu'il pénetre en un instant le milieu X; ou bien qu'il est d'une grandeur finie, & qu'il ne s'enfonce que dans un tems fini: on

dans l'une & l'autre hypothese la Sphere A s'écarte de la perpendiculaire HCI. 1°. Si le corps A est si petit qu'il entre en un instant dans le milieu X, sa force suivant AD [*Fig.* 50.] se décompose en deux efforts au moment qu'il touche la surface LL, l'un perpendiculaire à la surface LL, l'autre parallele à la même surface (*Liv. I.* 74.) ; chacun de ces efforts est diminué ; mais puisque le milieu X resiste davantage que le milieu Z, l'effort perpendiculaire AC est plus diminué que l'effort parallele CD ou AE : or cela ne peut être ainsi que la direction AD ne s'approche de l'horizontale AE, puisque si l'effort perpendiculaire étoit entierement détruit, le corps iroit suivant la même AE sans entrer dans le milieu X. Donc 1°. si la réfraction se fait en un instant, le globule A en entrant dans le nouveau milieu X qui résiste davantage, il s'éloigne de la perpendiculaire d'incidence HCI. 2°. Si la réfraction se fait dans un tems fini, [*Fig.* 51.] au premier instant que la sphere touche la surface LL, sa force suivant AD est aussi décomposée en deux efforts comme dans le premier cas, & par une raison semblable, la Sphere doit s'éloigner de la perpendiculaire HCI : or je dis qu'aux instans suivans elle s'en écarte encore. Supposons que la Sphere se soit enfoncée par la force de ce premier choc de la quantité CN ; du ceutre A soit tirée BK perpendiculaire à la direction AD, on pourroit faire voir qu'à chaque nouvel instant de l'enfoncement, la force suivant AD est décomposée de maniere que le corps est déterminé à s'éloigner de la perpendic. mais il nous suffira de remarquer ici qu'il n'y a que la moitié de la surface de la Sphere représentée par BNFK qui choque les deux milieux Z, X : or il est évident que la moitié BNF trouvant une plus grande résistance à avancer à la fois dans les milieux X, Z que la moitié FGK n'en trouve à avancer dans le milieu Z, la Sphere sera jettée par la force qui la pousse du côté où la résistance est moindre, qu'ainsi la partie FGK fera plus de chemin dans le milieu Z que la partie BNF n'en fera dans les deux milieux X,Z ; donc la Sphere s'enfonce dans le milieu X en s'éloignant de la perpendiculaire.

67. Si le milieu X résistoit moins que le milieu Z, le corps A s'approcheroit de la perpendiculaire HCI, y étant déterminé par la plus grande résistance du milieu Z dans lequel il feroit moins de chemin que dans le milieu X.

68. Nous avons supposé que le corps A est de figure sphérique, s'il en avoit une différente, il faudroit y avoir égard, comme aussi à la maniere dont il se présente pour entrer dans le nouveau milieu X.

LIVRE QUATRIEME.

De la Statiquf.

1. LA Statique est une science qui traite de l'équilibre des puissances appliquées aux machines, qui détermine leurs rapports & leurs directions, afin que l'equilibre qui est son objet principal, s'en ensuive.

2. *L'équilibre* est l'état de plusieurs forces qui agissent les unes sur les autres, de maniere que tout demeure en repos.

3. *Puissance* est tout ce qui peut mouvoir un corps; les unes sont animées, comme les hommes, les chevaux, &c, les autres inanimées, comme les poids, les ressorts, &c. Une puissance qui meut actuellement un corps, est appellée *force mouvante*; dans la Statique on ne considere point à proprement parler les forces mouvantes, cela n'empêche pas néanmoins qu'on ne puisse supposer qu'une machine qui est tenue en equilibre, tourne pendant un instant, afin de mieux discerner ce en quoi consiste l'opposition mutuelle des puissances. *La direction* d'une puissance est la ligne droite suivant laquelle elle tend à mouvoir un corps; la direction d'un poids est la ligne droite que la pesanteur tend à lui faire décrire.

4. *Les Machines* sont des instrumens auxquels des puissances s'appliquent, soit pour les mouvoir, soit pour y faire équilibre. Elles sont *simples* ou *composées* ; les machines simples sont au nombre de six. Le Levier, le Tour ou Treuil, la Poulie, le Plan incliné, la Vis & le Coin, auxquelles on peut ajouter la Machine funiculaire, ou les cordes qui soutiennent des poids.

5. *La machine composée* est un assemblage de machines simples, toutes concourantes par leurs mouvemens particuliers à la production d'un mouvement principal, ou à tenir par leur moyen des puissances en équilibre.

Les machines soulagent l'homme dans ses travaux, elles l'aident à finir ses ouvrages & à leur donner la perfection qu'ils peuvent avoir, elles lui servent à diviser le tems, & à en mesurer les différentes parties, elles lui procurent des commodités en diverses manieres : en un mot tout s'exécute avec les instrumens, & les instrumens sont des machines. Ce nombre prodigieux qu'on en a inventé pour la pratique des arts & des métiers, peut être rapporté à deux ou à trois; au levier & au plan incliné, & au tuyau ou vaisseau pour les liqueurs; les autres machines ne sont que des composés & des assemblages de celles-là, ou bien elles n'en sont que des especes.

6. Dans deux puissances qui agissent l'une contre l'autre, il faut distinguer la *force absolue* & la *force relative*. La force absolue est l'effort considéré en lui-même, il est comparable à un poids d'un certain nombre de livres ; la force relative est la force absolue en tant qu'elle est modifiée par la maniere dont ces puissances s'appliquent l'une à l'autre ; par ces efforts l'une des puissances agit, & l'autre résiste ; si la réaction est égale à l'action, les puissances sont en équilibre, quelles que soient d'ailleurs leurs forces absolues.

D'où l'on voit que la force absolue est d'une mesure déterminée ; mais la force relative d'une puissance peut croître & décroître, sa force absolue demeurant la même.

PROPOSITION I.

7. *Si deux puissances agissant l'une contre l'autre sont mûes l'une suivant sa direction, l'autre contre la sienne, leurs forces relatives sont entr'elles comme les produits de leurs forces absolues par les espaces parcourus.*

Supposons que la puissance P étant mûe suivant sa direction, fasse parcourir à la puissance R un espace contre la sienne; que, par exemple, la puissance P supposée de 3 livres, en parcourant suivant sa direction l'espace d'un pied contraigne la puissance R d'une livre à parcourir en même-tems contre la sienne, un espace de deux pieds. Il est certain que la force totale par laquelle la puissance P agit contre la puissance R n'est pas seulement égale à sa force absolue, supposée de trois livres, mais égale au produit de cette force par le nombre de fois qu'elle l'a exercée; or elle l'a exercée à chaque point de l'espace parcouru, puisqu'à tous les points de cet espace, elle a eu à surmonter la résistance de la puissance R. Donc 1°. pour avoir la force ou l'action totale de la puissance P contre la puissance R, il faut multiplier sa force absolue de trois livres par l'espace parcouru, qui est un pied. 2°. Pareillement la résistance totale de la puissance R est égale au produit de sa force absolue d'une livre par l'espace de deux pieds; car la résistance éprouvée par la puissance P est égale ou la même que si à tous les points de l'espace que la puissance R parcourt, il y avoit des puissances égales à R, qui résistassent à la puissance P, puisque la puissance R a résisté continuellement, & qu'à tous les points par où elle a passé, la puissance P a été obligée de la surmonter: or pour avoir la résistance de toutes ces puissances, il faudroit multiplier la force absolue de l'une d'elles par leur nombre, ou par le nombre des points de l'espace; donc pour avoir la résistance totale de la puissance R, il faut multiplier sa force absolue par le même nombre de points, ou par l'espace qu'elle a été contrainte de parcourir contre sa direction.

Voici deux exemples qui peuvent servir à fortifier la se-

conde partie de la preuve. 1°. Lorſqu'une puiſſance éleve un poids par un mouvement uniforme, pour avoir ſa force totale ou la ſomme des efforts qu'elle a faits, il faut multiplier l'effort du premier inſtant par le nombre de fois qu'elle l'a exercé, c'eſt-à-dire, par l'eſpace parcouru: or puiſque cette puiſſance ſoutient le poids tout le long de l'eſpace parcouru, & que ce n'eſt qu'à cauſe de la réſiſtance qu'il fait, qu'elle eſt obligée de renouveller à chaque point de cet eſpace ſon effort, il s'enſuit que la réſiſtance totale du poids eſt auſſi égale au produit de ſa peſanteur abſolue par l'eſpace parcouru.

2°. Suppoſons que le reſſort BGCF [*Fig.* 1.] ſoit comprimé à un point que ſi ſon extrémité inférieure GC s'approche de la ſupérieure BF de la quantité CE, le nouveau degré de compreſſion qu'il reçoit ſoit inſenſible par rapport à celui qu'il a déja. Selon cette hypothèſe la réſiſtance que la puiſſance trouve en réduiſant le reſſort à occuper l'eſpace BDEF ſera par-tout la même. Cela poſé, il eſt évident que la force ou l'action totale que la puiſſance exerce contre le reſſort eſt égale au produit de ſa force abſolue par l'eſpace CE, puiſqu'à chaque point de cet eſpace, il faut qu'elle ſurmonte la réaction du reſſort: or pareillement la réſiſtance totale du reſſort eſt auſſi égale au produit de ſa réſiſtance abſolue par CE, puiſqu'il a réagi partout cet eſpace: D'où l'on voit que la réſiſtance totale d'une puiſſance qui eſt contrainte de rétrograder ou d'aller contre ſa direction eſt proportionnelle au produit de ſa force abſolue par l'eſpace parcouru.

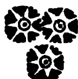
8. *Coroll. Si deux puiſſances qui agiſſent l'une contre l'autre ſont tellement diſpoſées que les eſpaces qu'elles parcourroient, l'une ſuivant, l'autre contre ſa propre direction ſoient réciproquement proportionnels à leurs forces abſolues, elles ſont en équilibre.* Car les produits de ces forces par les eſpaces parcourus ſont égaux (12. *Arith.*); donc les forces relatives de ces puiſſances ſont auſſi égales; donc la réaction totale de l'une eſt égale à l'action totale de l'autre; donc les puiſſances ſont en équilibre.

9. La Propoſition qui vient d'être prouvée, & ſon Corollaire contiennent implicitement le premier Principe de Méchanique de M. Deſcartes : ſuivant ce principe il faut autant de force pour élever un poids de deux livres à la hauteur de dix pieds, que pour élever un poids de dix livres à la hauteur de deux pieds; de ſorte que ſi ces poids ſont tellement diſpoſés que l'un ne puiſſe deſcendre de 10 pieds, que l'autre ne ſoit obligé de monter à la hauteur de 2 pieds, ils ſont en équilibre ; car pour lors leurs forces relatives ſont égales ; ainſi l'un ne peut ſurmonter l'autre.

Ce principe étant bien entendu, non-ſeulement ne ſouffre point de difficulté; mais il montre encore bien clairement ce qui conſtitue *la force relative* d'une puiſſance, ce qu'il n'eſt pas aiſé d'appercevoir avec le ſecours des autres principes de Méchanique.

10. Nous avons remarqué que toutes les machines, ſans en excepter les ſimples, peuvent être rapportées au levier, & au plan incliné : afin d'abréger nous nous attacherons à cette méthode, & nous démontrerons l'analogie propre à chacune de ces deux machines, en leur appliquant 1°. le principe de M. Deſcartes qui vient d'être expoſé, 2°. le principe de M. Varignon, des forces compoſées; ainſi ce qui concerne les autres machines ſera déduit par maniere de conſéquence de la théorie du levier & du plan incliné, en raiſonnant ſuivant l'un ou l'autre de ces principes.

Ce Livre contiendra trois Chapitres. Le premier traitera du Levier, de la Poulie, & du Treuil; le ſecond, du Plan incliné, de la Vis, du Coin, & de la Machine funiculaire; le troiſiéme des Machines compoſées, de la Balance, & du Peſon.



CHAPITRE I.

Du Levier, de la Poulie, & du Treuil ou Tour.

CES trois Machines ont cela de commun, qu'elles tournent ſur un appui, & que c'eſt par des analogies ſemblables que l'on détermine le rapport de la puiſſance au poids qu'elle ſoutient.

Du Levier.

11. Le Levier dont les Ouvriers ſe ſervent eſt un barre de fer, de bois, ou de quelque autre matiere dure, & non ſujette à ſe courber; pour que le levier puiſſe jouer, il doit avoir un appui que l'on appelle auſſi *Hypomochlion*, nom tiré du grec. L'appui peut avoir trois poſitions différentes à l'égard de la puiſſance, & du poids; ce qui a fait diſtinguer trois ſortes de Levier. On appelle Levier de *la premiere eſpece* celui dont l'appui eſt entre la puiſſance & le poids; Levier de *la ſeconde eſpece*, lorſque le poids eſt entre la puiſſance & l'appui; & Levier de *la troiſiéme eſpece*, ſi la puiſſance eſt entre le poids & l'appui. Nous conſidérerons les machines comme ſi elles étoient ſans maſſe, ſans peſanteur, comme compoſées de lignes & de figures géométriques, inflexibles, parfaitement mobiles & exemptes de tout frottement: cette maniere d'enviſager les machines laiſſera à l'eſprit la liberté de ne s'occuper que de l'objet principal de la Statique, qui eſt d'établir & de déterminer les rapports que doivent avoir des puiſſances en équilibre; cette premiere conſidération n'empêche pas qu'on n'examine enſuite les machines dans l'état réel, & avec leurs qualités phyſiques, afin de connoître le déchet ou la perte que la puiſſance reçoit pour les mouvoir, & lorſqu'elle en ſurmonte les frotemens. Suivant cette ſuppoſition, le levier ordinaire eſt une ligne inflexible poſée ſur un appui à laquelle ſont appliquées deux

puiſſances ou deux poids; ou une puiſſance & un poids. XY [*Fig.* 2. & 3.] eſt la longueur du levier; F l'appui; M, N les points auxquels les puiſſances ou les poids ſont appliqués; MO, NS leurs directions; FM, FN les bras du levier; FA, FD les perpendiculaires menées de l'appui ſur les directions prolongées s'il eſt néceſſaire; les cordons MO, NS ſont ſuppoſés ſans peſanteur parfaitement flexibles, & ſans frottement.

12. *Suppoſitions.* 1°. Dans l'équilibre on peut mettre un poids au lieu d'une puiſſance, & une puiſſance au lieu d'un poids. Car dans l'équilibre la conſidération des maſſes eſt inutile, il ſuffit de faire un effort d'une certaine meſure: or cet effort peut être produit par une puiſſance ou par un poids; on peut mettre auſſi un obſtacle au lieu d'une puiſſance, & une puiſſance au lieu d'un obſtacle; car un obſtacle & une puiſſance peuvent empêcher le mouvement, & contribuer également à tenir la machine en équilibre.

13. 2°. Lorſque trois puiſſances ſont en équilibre, leurs directions ſont en un même plan, & elles concourent en un même point, auquel étant immédiatement appliquées, deux d'entr'elles ſe compoſent en un effort auquel la troiſiéme puiſſance réſiſte (*Liv. I.* 79, 80, 81, 82).

14. 3°. Lorſque des puiſſances ſont en équilibre, elles agiſſent également à tous les points de leurs directions, en ſorte que ſi des points où l'on les ſuppoſe appliquées, leur action peut s'étendre juſqu'à la machine, l'effet ſera le même que ſi elles la tiroient ou la pouſſoient immédiatement. 4°. Nous ajouterons une quatriéme ſuppoſition. Un plan n'eſt preſſé & ne réſiſte que ſuivant la perpendiculaire, en ſorte que ſi un corps eſt pouſſé obliquement contre un plan la ſeule réſiſtance qu'il fait n'eſt point capable d'arrêter le corps, mais il eſt néceſſairement mû ſur le plan. Cette ſuppoſition eſt confirmée par l'expérience très-aiſée à faire, car ſi on appuie avec une baguette ſur un plan bien uni, par exemple, une table de marbre, elle gliſſe ſi la direction eſt oblique, & la réſiſtance que la table fait eſt d'autant moindre que la baguette eſt plus oblique à ſon plan.

Cette ſuppoſition a été déduite dans le premier Livre 74, 75; mais parce qu'elle y eſt liée avec le principe du parallelogramme des forces, on l'a miſe ici, afin qu'on ne ſoit point obligé d'y recourir, & qu'on la conçoive indépendamment de ce principe.

PROPOSITION I.

15. *Deux puiſſances* P, R [Fig. 2, 3.] *appliquées aux points* M, N *du levier* XY *ſont en équilibre, ſi elles ſont entr'elles dans la raiſon réciproque des perpendiculaires* FA, FD *menées de l'appui* F *aux directions. C'eſt-à-dire, ſi on a* P. R : : FD. FA.

I. Démonſt. On ſuppoſe que les directions ſont en un même plan; ainſi le levier ne peut avoir d'autre mouvement que le circulaire en tournant dans ce plan autour de l'appui F. Suppoſons que les puiſſances ſont appliquées aux points A, D des perpendiculaires FA, FD conçues comme inflexibles, ſuivant les mêmes directions MO, NS; ſi elles ſont en équilibre étant appliquées aux points M, N, elles y ſeront encore étant appliquées aux points A, D (14): or je dis que les Puiſſances P, R ſont en équilibre, lorſqu'elles ſont appliquées aux points A, D. Que la puiſſance P, que l'on ſuppoſe la plus grande, l'emporte, s'il eſt poſſible, ſur la puiſſance R, & dans ce mouvement ne conſidérons que les petits eſpaces AG, DI que les points A, D ou les puiſſances P, R décrivent au premier inſtant que le levier commence à tourner, ces petites lignes ne different point des côtés infiniment petits des cercles qui ont pour rayons FA, FD; elles ſont donc entre elles comme ces mêmes rayons (24. *Géom.*); ce qui eſt d'ailleurs évident par les triangles ſemblables AFG, DFI, dont les angles en F ſont égaux, à cauſe que le mouvement circulaire eſt le même pour tous les points de la machine; d'ailleurs les angles A, D ſont droits; donc les triangles AFG, DFI ſont ſemblables (8. *Géom.*); donc DI. AG : : FD. FA; or l'hypothèſe donne P. R : : FD. FA; donc P. R : : DI. AG, c'eſt-à-dire, que les puiſſances P, R ſont

entr'elles réciproquement comme les espaces AG, DI qu'elles parcourroient, sçavoir la puissance P suivant sa direction, & la puissance R contre la sienne. Donc elles sont en équilibre (8).

II. Démonst. Il faut mener de l'appui F [*Fig.* 4, 5.] FB, FE paralleles aux directions MP, NR, que l'on suppose concourir au point C; par-là nous aurons le paralelog. ECBF, & les deux triangles EAF, DBF, que je dis être semblables; car les angles A & D formés par les perpendiculaires FA, FD sont droits, & les angles E, B sont aussi égaux, car ils sont égaux à l'angle BCE des directions (27. *Geom.*); donc FB. FE : : FD. FA. Or l'hypothèse donne P. R : : FD. FA; donc P. R : : FB. FE, c'est-à-dire, que les puissances P, R sont entr'elles comme les côtés FB, FE, ou leurs égaux CE, CB du parallelog. BE fait sur leurs directions. Cela posé, si les puissances P, R étoient immédiatement appliquées au point de concours C suivant les mêmes directions, elles lui feroient décrire la diagonale FC, laquelle passe par l'appui F (*Liv. I.* 64). Donc si à l'effort suivant CF on oppose la puissance S qui étant égale réagisse suivant FC, il y aura encore équilibre (*Liv. I.* 77); de plus si les trois puissances sont immédiatement appliquées au levier suivant les mêmes directions, l'équilibre subsistera encore (*Liv. I.* 80), si enfin au lieu de la puissance S on substitue la résistance de l'appui, les deux puissances P, R feront équilibre avec le levier XY posé sur l'appui F (12); donc si deux puissances, &c.

16. *Remarque.* Si tout corps qui est poussé à la fois par deux puissances suivant des directions qui concourent décrivoit la diagonale d'un parallelogramme fait sur les directions, on pourroit abréger la seconde Démonstration; mais il est évident qn'il y a plusieurs cas où un corps ne décrit point cette diagonale, comme dans la *Fig.* 5, où les points M, N doivent obéir chacun à l'impression de la puissance qui le tire, le point M doit suivre la direction MP, & le point N la direction NR, soit que l'on suppose que les puissances P, R sont appliquées immédiatement au levier,

ou non ; c'est pourquoi il a été nécessaire de passer par les suppositions qui ont été démontrées dans le I. Liv. art. 76 & suiv.

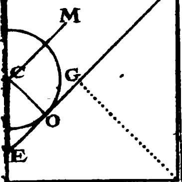
PROPOSITION II.

17. *Si deux puissances* P, R [Fig. 2, 3.] *sont en équilibre sur le levier* XY, *elles sont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires* FA, FD *menées de l'appui* F *aux directions.*

Cette Proposition est l'inverse de la précédente ; & dans la premiere Démonstration qui suit, nous supposerons que des puissances étant en équilibre, on ne peut augmenter ni diminuer l'une d'elles, les autres puissances demeurant les mêmes, & leurs directions aussi, sans rompre l'équilibre. Ce qui est évident.

I. Démonst. Les puissances P, R sont en équilibre ; donc elles sont en un même plan (*Liv. I.* 79); c'est pourquoi si elles étoient entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires FA, FD elles seroient en équilibre (15). Donc si étant en équilibre elles ne sont point dans le rapport inverse des perpendiculaires FA, FD, il faut que leur rapport soit plus grand ou moindre ; s'il est plus grand en diminuant la puissance P, on pourroit faire le rapport des puissances égal au rapport inverse des distances aux directions ; donc elles seroient en équilibre ; c'est-à-dire, que deux puissances P, R étant en équilibre telles qu'on les a d'abord supposées, elles y seroient encore, quoique l'une d'elles eût été diminuée ; ce qui est impossible. On prouvera de même que si le rapport de la puissance P à la puissance R étoit supposé moindre que le rapport inverse de FA à FD, il seroit impossible que ces puissances fussent en équilibre ; ainsi qu'on suppose qu'elles y sont.

II. Démonst. [*Fig.* 4, 5.] Puisque les puissances P, R sont en équilibre, leurs directions MN, NR sont en un même plan, & elles concourent en un point C (*Liv. I.* 79. 81), de même que celle de la résistance de l'appui ; & si les puissance P, R sont immédiatement appliquées au point de concours C suivant les mêmes directions, elles seront encore



g. 27.
M
C
G
O
E

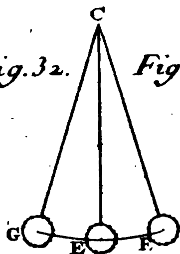


Fig. 32.
C
G
E
F

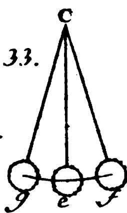


Fig. 33.
C
g
e
f

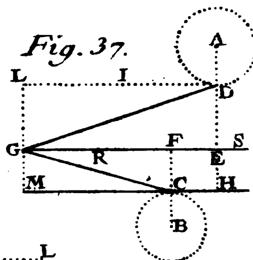


Fig. 37.
A
L
I
D
G
F
S
R
E
M
C
H
B

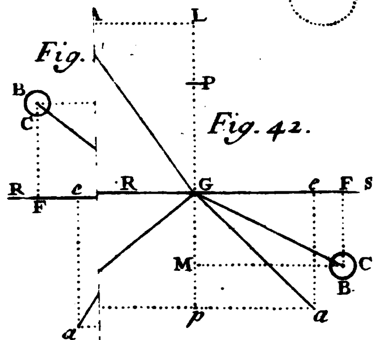
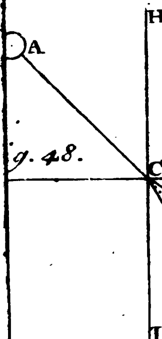


Fig.
L
P
B
C
Fig. 42.
R
F
e
R
G
e
F
s
M
C
B
a
p
a



H
A
g. 48.
C
I

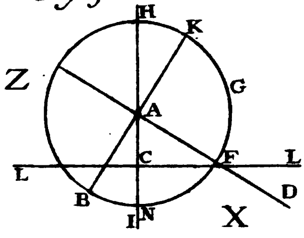


Fig. 51.
H
K
Z
G
A
C
F
L
L
B
I
N
X
D

co

l'ap

Rſ

var

de

ne

eld

R

ſt

ne

tô

E

D

F

core en équilibre (*Liv. I.* 80), la ligne FC suivant laquelle l'appui résiste étant supposée inflexible : or les puissances P, R se composent en un effort qui est nécessairement dirigé suivant CF, puisque l'appui F résiste à cet effort par le moyen de la ligne FC supposée inflexible ; donc si du point F on mene FE, FB paralleles aux directions pour avoir le parallelogramme ECBF, la force composée des puissances P, R mouvroit le point C sur la diagonale CF, puisque la résistance de l'appui dirigée suivant FC empêche ce mouvement ; donc les puissances P, R sont entr'elles comme les côtés CE, CB du parallelog. ECBF, ou leurs égaux FB, FE (*Liv. I.* 62.) : de plus les triangles semblables AEF, DBF donnent FB. FE : : FD. FA (8. *Géom.*) donc P. R : : FD. FA. (14. *Arith.*) Donc, &c.

Corollaires qui suivent des deux dernieres propositions ; ils supposent l'une ou l'autre des Démonst. précédentes.

18. 1°. Si deux puissances P, R appliquées au levier XY suivant les directions MP, NR qui concourent au point C, sont entr'elles réciproquement comme les distances de l'appui aux directions, elles sont en équilibre, car les distances ne different point des perpendiculaires FA, FD. Donc, &c.

19. 2°. *Si les puissances* P, R *sont entr'elles réciproquement comme les sinus des angles* FCA, FCD *formés par leurs directions, & la ligne menée de l'appui* F *au point de concours* [Fig. 2, 3, 4, 5.] *elles sont en équilibre.* Car si du point C comme centre, & avec le rayon CF on conçoit un cercle décrit, il passera par le point F, & les perpendiculaires FA, FD seront les sinus des angles FCA, FCD, ou des arcs qui les mesurent (21. *Géom.*) : or si les puissances P, R dont les directions concourent au point C sont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires FA, FD elles sont en équilibre (15) ; donc si elles sont entre elles réciproquement comme les sinus des angles FCA, FCD, elles sont aussi en équilibre.

20. 3°. L'angle ACD des directions peut augmenter ou diminuer à l'infini, sans que le rapport inverse des

perpendiculaires ou ſinus FA, FD change; or, dans tous ces changemens de l'angle ACD les puiſſances P, R demeurant les mêmes ſeront en équilibre (15); d'où l'on voit que deux puiſſances appliquées à un levier peuvent faire équilibre ſuivant une infinité de directions différentes.

21. 4°. Si l'angle ACD eſt infiniment petit, les directions ſont paralleles ſenſiblement; car de même que l'on peut ſuppoſer que des paralleles font des angles infiniment petits, on peut ſuppoſer auſſi que des lignes qui font un angle infiniment petit ſont paralleles. Cela étant, ſi les puiſſances P, R ſont pour lors entr'elles réciproquement comme les bras FM, FN du levier XY; elles ſont en équilibre. Car les triangles ſemblables FAM, FDN [*Fig.* 6, 7.] donnent FD. FA :: FN. FM (8. *Géom.*); or l'hypothèſe donne P. R :: FN. FM. Donc P. R :: FD. FA (14. *Arith.*) c'eſt-à-dire, que les puiſſances P, R ſont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires menées de l'appui F aux directions, ou réciproquement comme les ſinus des angles FCA, FCD; donc elles ſont en équilibre. Si les directions ſont perpendiculaires au levier, les bras FM, FN ſont eux-mêmes les perpendiculaires ou les ſinus des angles FCA, FCD. Si les bras ſont égaux & les directions paralleles, les puiſſances ſont égales.

22. 5°. Si le rapport inverſe des perpendiculaires FA : FD, qui ſont auſſi les ſinus des angles FCA, FCD (19) change, ce qui peut arriver en pluſieurs manieres, il faudra pour l'équilibre que le rapport des puiſſances P, R reçoive des changemens ſemblables.

23. 6°. Les propoſitions inverſes des Corollaires précédens ſont auſſi vraies; c'eſt-à-dire, que ſi les puiſſances ſont en équilibre 1°. elles ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui F aux directions. 2°. Elles ſont entr'elles réciproquement comme les ſinus des angles FCA, FCD formés par les directions, & la ligne menée de l'appui F au point de concours C. 3°. Elles ſont entr'elles réciproquement comme les bras FM, FN ſi les directions ſont perpendiculaires au levier, ou bien paralleles ſans être perpendiculaires. 4°. Si les puiſſances P, R font équilibre,

l'angle des directions augmentant, ou diminuant, il faudra que le rapport inverse des perpendiculaires FA, FD qui sont aussi les sinus des angles FCA, FCD demeure le même, autrement l'équilibre supposé seroit impossible. 5°. Si le rapport des puissances P, R supposées toujours en équilibre reçoit quelque changement, ce qui peut se faire en bien des manieres, il faudra que le rapport inverse des perpendicul. FA, FD qui sont aussi les sinus des angles FCA, FCD, reçoivent des changemens semblables. Ces Corollaires se déduisent de la derniere Proposition avec la même facilité que l'on a déduit ceux qui précedent de la Proposition I.

24. Puisque les masses ne contribuent en rien par elles-même à l'équilibre (12), il s'ensuit que tout ce qui a été prouvé de deux puissances appliquées à un levier, convient aux poids, ou pesanteurs des corps; d'ailleurs les masses sont dans la raison des pesanteurs (*Liv. II.* 22); ainsi en considérant même ces pesanteurs avec leurs masses, on peut leur appliquer dans l'équilibre tout ce qui vient d'être dit des puissances.

De l'équilibre des poids eu égard à quelques circonstances.

25. Les poids qui sont appliqués à un levier, y sont attachés fixement, ou ils sont suspendus avec des cordons. J'appelle *levier droit* la ligne droite GE, qui joignant les centres de gravité de deux poids fixement arrêtés à un levier, passe par l'appui F [*Fig.* 8.] ou si les poids étant suspendus avec des cordons, la ligne droite GE qui joint les points de suspension G, E passe aussi par l'appui F; tout autre levier sera appellé *courbé*. On suppose que les directions des poids sont paralleles.

PROPOSITION III.

26. *Deux poids appliqués à un levier droit étant en équilibre dans une situation du levier, ils y sont dans toutes les autres. 2°. Si le levier est courbé, & qu'ils soient en équilibre dans une situation du levier, ils cesseront d'y être s'il en change.*

1°. Si les poids P, R [*Fig*. 8.] ſont en équilibre dans la ſituation que la figure repréſente, ils y ſont encore dans toute autre ſituation du levier. Car puiſqu'ils ſont en équilibre dans une certaine ſituation, ils ſont pour lors dans la raiſon reciproque des diſtances FA, FD, & parce que les triangles GAF, EDF ſont ſemblables, les parties FG, FE de la ligne GE, c'eſt-à-dire, les bras du levier droit GE, ſont dans la même raiſon que les diſtances FA, FD; donc les poids P, R ſont auſſi entr'eux réciproquement comme les bras GF, FE, quelque ſituation que le levier prenne; ce qui eſt évident, puiſque les bras GF, EF conſervent la même longueur; de plus les directions des poids ſont paralleles; donc ils ſont en équilibre dans toutes les autres ſituations (21). Il en eſt de même pour les autres figures où la ligne GE qui joint les centres de gravité G, E, ou bien les points de ſuſpenſion des poids paſſe par l'appui F.

2°. Si les poids P, R appliqués au levier courbé GFE [*Fig*. 9.] ſont en équilibre dans la ſituation que la figure repréſente, ils ceſſent d'y être ſi le levier en change. Car les bras FG, FE ſont obliques aux directions GP, ER; ſuppoſons que le levier tourne, & que c'eſt le poids P qui deſcend, il eſt viſible que l'oblique FG s'approchera de l'horizontale, & que la direction GP s'éloignera de l'appui F, enſorte que FG étant horizontale, cette ligne ſera la diſtance de l'appui F à la direction GP; au contraire la direction ER s'approchera du même appui F; les poids P, R ceſſeront donc d'être dans la raiſon réciproque des diſtances de l'appui aux directions; donc ils ne ſeront point en équilibre. (17. 22.)

27. *Corollaire*. Puiſque la direction GP s'éloigne de l'appui F lorſque la ligne ou bras GF étant au-deſſus ou au-deſſous de l'horizontale qui paſſe par l'appui F, s'approche de la même horizontale, il s'enſuit que la puiſſance R qui fait équilibre avec le poids P doit pour lors augmenter, ſuppoſé que ſa direction ER demeure à la même diſtance de l'appui F (22.); mais ſi le bras ou ligne GF étant

au-dessus ou au-dessous de l'horizontale qui passe par l'appui F, s'éloigne de la même horizontale, pour lors la direction GP s'approche de l'appui ; c'est pourquoi la puissance R qui fait équilibre avec le poids P devra diminuer supposé qu'elle tire le levier à la même distance de l'appui F.

De l'appui dans le levier.

28. Il y a deux choses à sçavoir par rapport à l'appui du levier, la charge, & la direction de cette charge. 1°. A l'égard de la direction il est certain qu'elle passe par l'appui, puisque l'appui soutient cette charge. 2°. Cette direction passe aussi par le point de concours des directions, car les puissance P, R se composent dans l'équilibre en un effort, lequel est dirigé suivant une ligne qui passe par le point de concours. (*Liv. I.* 81.)

29. 2°. Pour déterminer la charge, ou plutôt la résistance de l'appui, il faut concevoir qu'elle est suppléée par une puissance S [*Fig.* 10.] qui tire suivant FS (12) ; nous aurons donc le levier XY tenu en équilibre par les trois puissances P,R,S : or puisque l'appui peut être indifféremment ou aux extrémités du levier ou en quelque autre point situé entre les directions des deux puissances en équilibre, il s'ensuit que chacune des trois P,R,S peut être considerée comme faisant l'office d'appui, & les deux autres comme faisant équilibre avec le levier posé sur cet appui : ainsi si l'on considere la puissance R comme resistante, le point N de la direction NR sera comme l'appui, & la résistance de l'appui F ou bien la puissance S qui la représente fera équilibre avec la puissance P ; pour lors les puissances P,S sont entr'elles réciproquement comme les perpendic. NA, NB menées de l'appui N aux directions CMP, FS, ou réciproquement comme les sinus des angles MCN,FCN (17.23.*n.*2) : en un mot tout ce qui a été démontré du rapport des puissances P,N en équilibre sur le levier XY posé sur l'appui F, convient aussi à la puissance P, & à la résistance de l'appui F, ou à la puissance S qui la représente, en

considérant que ces deux puissances font équilibre sur le levier XY posé sur l'appui N dont la résistance est égale à l'effort de la puissance R. On fera voir de la même maniere que la résistance de l'appui F & la puissance R, sont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires menées de l'appui M aux directions FS, CNR, ou bien réciproquement comme les sinus des angles FCM, NCM. On peut aussi déduire cette résistance du parallelog. des forces.

PROBLÊME I.

30. *Deux hommes portent ensemble avec une barre* AB *un fardeau pesant 240 liv. suspendu au point* C *distant de l'extrémité* A *des deux tiers de la barre, trouver la charge de chacun* [Fig. 11.]

Il faut considérer l'homme qui est placé à l'extrémité B comme faisant l'office d'appui, & l'homme placé à l'extrémité A & le fardeau P, comme deux puissances en équilibre sur le levier AB; les distances de l'appui aux directions sont BA, BC lesquelles sont entr'elles comme 3 & 1, puisque AC est les deux tiers de AB. Cela étant, il faut dire $3 . 1 :: 240 . x = \frac{240 \times 1}{3} = 80$ (17) : ainsi l'homme placé en A porte 80 liv. & celui qui est en B porte le surplus, c'est-à-dire, 160 livres. On peut trouver la charge en B immédiatement comme nous venons de trouver celle de A; il faut considérer le point A comme l'appui, & dire $3 . 2 :: 240 . x = \frac{240 \times 2}{3} = 160$ livres. (17)

PROBLÊME II.

31. *Trouver la force nécessaire pour dresser la poutre* AB *sur son extrémité* A. [Fig. 12.]

1°. Il faut que la puissance s'applique à l'autre extrémité B, & que sa direction BE soit perpendiculaire à la longueur AB pendant le mouvement, afin que la distance à l'appui A soit la plus grande, & par conséquent la plus avantageuse. 2°. Il faut considérer toute la pésanteur de la

poutre comme réunie au centre de gravité C. Cela étant, il est visible qu'au premier instant que l'extrémité B quitte la terre, les distances de l'appui A aux directions sont AB & AC qui sont entr'elles dans la raison de 2 à 1; c'est pourquoi la puissance en B porte la moitié du poids S (17); mais à mesure que l'extrémité B s'éleve, la direction CD du centre de gravité s'approche de l'appui A: on aura les différentes distances AD en laissant pendre du centre C un plomb CD qui rencontre l'horizontale AH aux points D; c'est pourquoi si la poutre pese 1500 livres, on trouvera les différentes charges de la puissance en B, si on fait les proportions AB . AD :: 1500 . *x*. On pourroit trouver par le calcul les différentes distances AD en supposant connus les angles d'inclinaison CAD, car pour lors on connoîtroit tous les angles du triangle CAD, & le côté AC. On peut trouver de cette maniere la force nécessaire pour lever un pont levis, ou pour le soutenir en l'air.

De la Poulie.

32. Dans la Poulie il faut remarquer le rond ou roulette MN [*Fig.* 13. 14. 15. 16.] qui est engagée dans sa chape ou écharpe HO, où elle est retenue par le moyen d'un tourillon qui la traverse par son centre O, de maniere qu'elle peut tourner autour de cet aissieu; une corde embrasse une partie de sa circonférence, & afin qu'elle ne la quitte point lorsque la roulette tourne, on a soin de faire une entaille ou sillon entre les deux cercles qui terminent son épaisseur: la corde est tendue par l'action de la puissance & du poids ou fardeau qu'il faut mouvoir, & le frottement qu'elle fait sur la roulette la fait tourner à mesure qu'elle est tirée.

33. La *Poulie fixe* [*Fig.* 13. 14.] est celle dont la chape est fixe, c'est-à-dire, qu'elle est attachée à un point fixe, autour duquel elle peut néanmoins se mouvoir en différens sens, & la roulette autour de son aissieu. La *poulie mobile* [*Fig.* 15. 16.] est celle dont la chape est mobile,

c'est-à-dire, qu'elle peut aller & venir dans le sens que la puissance la tire. Les directions de la puissance & du poids sont ou paralleles, ou elles concourent, car elles sont en un même plan; celle du poids est perpendiculaire à l'horizon, c'est pourquoi elle est dans un plan vertical; donc celle de la puissance y est aussi; les plans qui terminent la roulette sont donc dans une situation verticale, de même que la chape OH de la poulie mobile,& parce que la direction du poids est au milieu de la largeur de cette chape, il s'ensuit qu'elle passe par le centre O. Il est évident que la corde touche la poulie aux deux points où elle commence à s'en séparer, car étant prolongée en ligne droite vers le côté opposé, elle ne la rencontreroit point, autrement il faudroit que la circonférence de la roulette fût continuée en ligne droite : ainsi les rayons OM, ON menés aux points d'attouchement M, N sont perpend. aux portions PM, EN de la corde. (14. *Géom.*) Lorsque les directions sont paral. les rayons OM, ON [*Fig.* 13. 15.] sont sur une même ligne droite qui est un diametre; mais lorsqu'elles concourent ils font un angle MON qui a pour base la soutendente MN de l'arc que la corde embrasse. Lorsque les directions concourent au point C, les angles MON, MCN, & la soutendente MN sont divisés en deux parties égales par la ligne CO, car les triangles MCO, NCO sont égaux en tout. Si deux puissances sont en équilibre sur une poulie, elles y seroient encore s'il ne restoit de la roulette que les rayons OM, ON, & la soutendente MN supposés inflexibles; car il est visible que la figure circulaire de la poulie n'est que pour la facilité du mouvement : ainsi ces puissances sont en équilibre sur la poulie comme sur un levier MON droit ou courbé, qui dans la poulie fixe auroit son appui F au centre O & dans la poulie mobile sur la corde EN.

PROPOSITION IV.

34. 1°. *Dans la poulie fixe le rapport de la puissance* P *au poids* R *est un rapport d'égalité; c'est-à-dire, que si la puissance est égale au poids, il y a équilibre.*

2°. *Dans la poulie mobile si la puissance est au poids comme le rayon de la poulie est à la soutendente* MN *de l'arc que la corde entoure, il y a équilibre.*

Premiere Partie. Du centre O ou point fixe F [*Fig.* 13. 14.] il faut mener aux directions les perpendiculaires FA, FD qui ne different point des rayons OM, ON. Selon l'hypothèse le rapport de la puissance P au poids R est un rapport d'égalité : or il est visible que le rapport inverse des perpendic. FA, FD menées de l'appui F aux directions est aussi un rapport d'égalité ; donc la puissance P & le poids R sont dans la raison inverse des perpendiculaires FA, FD ; donc il y a équilibre. (15)

Seconde Partie. Puisque tous les points de la corde EN [*Fig.* 16.] résistent également, chacun peut être pris pour l'appui F du levier : or nous supposerons que cet appui F est au point d'attouchement N. Il faut mener FA, FD perpendiculaires aux directions. Les triangles DFO, AFM sont semblables, les angles A, D sont droits, les angles AFM, DFO sont l'un & l'autre égaux à l'angle OMN, car le triangle OMN est isocele ; donc les angles sur la base MN sont égaux (6. *Géom.*) ; d'ailleurs OM & FA étant perpendiculaires à AP, sont paralleles (28. *Géom.*) ; donc les angles alternes OMN, AFM sont égaux (29. *Géom.*) ; donc les angles AFM, DFO étant égaux à l'angle OMN, sont égaux entr'eux, & les triangles DFO, AFM sont semblables (8. *Géom.*) ; donc FD . FA :: FO . FM ; l'hypothèse donne P.R :: FO.FM ; donc P.R :: FD.FA (14. *Arith.*) ; c'est-à-dire, que la puissance P & le poids R sont dans la raison réciproque des perpendic. FA, FD menées de l'appui F aux directions (3. *Arith.*) ; donc il y a équilibre (15).

35. *Coroll.* Lorsque l'angle MON est infiniment grand [*Fig.* 15.], la soutendente MN est pour lors un diametre, & les directions MP, NE sont paralleles ; c'est pourquoi dans le cas du parallelisme des directions, si la puissance est au poids comme le rayon est au diametre, ou comme 1 est à 2, il y a équilibre : d'où l'on voit que les directions étant paralleles, il faut moins de force pour soutenir le poids R que lorsqu'elles concourent.

Du Tour ou Treuil, & des machines qui y ont rapport.

36. Cette machine reçoit différens noms selon la figure qu'on lui donne, l'usage qu'on en fait, & la situation dans laquelle on la pose. Il y faut remarquer le cylindre CC [*Fig.* 17.] qui tourne sur deux pivots E, F qui sont engagés dans deux trous ou fentes qui tiennent le cylindre assujetti de maniere qu'il ne peut que tourner; les pivots sont les prolongemens de l'axe: on perce la circonférence du cylindre de plusieurs trous où l'on implante des batons DG auxquels la puissance s'applique: pour la commodité de la puissance, au lieu de batons on se sert aussi d'une roue qui a le même axe que le cylindre; on perce aussi les deux plans paralleles de la roue de plusieurs trous où l'on fait entrer des chevilles perpendiculairement aux mêmes plans & paralleles à l'axe. Le cylindre est aussi appellé *Tour* ou *Rouleau*, & la roue *Tambour* ou *Tympan*. Lorsque le tour ou rouleau est posé de niveau, c'est-à-dire, qu'il est horizontal, la machine est appellée Treuil, Virevau, &c. & par les Latins *sucula*; mais lorsque le cylindre est à plomb ou perpendiculaire à l'horizon, il est appellé *Vindas*, *Cabestan*, & par les Latins *ergata*. Lorsqu'au rouleau ou cylindre on ajoute une roue, la machine est appellée par les Latins *axis in peritrochio*, c'est-à-dire, la roue avec son axe ou aissieu, ou l'aissieu dans la roue; *axis* c'est le cylindre ou rouleau, *peritrochium* le tambour ou la roue. Nous nommerons dans la suite *axe* une ligne inflexible qui passe par les centres des bases du rouleau ou cylindre.

Le tour ou treuil & les machines qui s'y rapportent ont deux appuis, c'est pour cela que deux puissances en équilibre sur cette machine peuvent avoir & ont ordinairement leurs directions en des plans différens: car comme le tour ne peut recevoir que le mouvement circulaire, & que la puissance peut le produire avec la même facilité à quelque distance que le plan de sa direction soit de l'une ou de

l'autre extrémité de l'axe, il s'ensuit que le poids en reçoit la même impression ; ainsi l'équilibre de deux puissances appliquées au treuil, & dont les directions sont en des plans différens, ne se fait pas autrement que si elles étoient en un même plan représenté par le plan AKG [*Fig.* 18.] de la roue, BLN est la section du rouleau faite par le plan AKG, MP la direction de la puissance P, NR du poids R, le point C le centre commun du plan de la roue & de la section du cylindre, c'est aussi le centre du mouvement circulaire qui se fait autour de l'axe, ce point est comme l'appui qui soutient les efforts des puissances en équilibre. Nous remarquerons encore par rapport à cette machine que les puissances P, R qui tirent suivant les directions MP, NR étant en équilibre elles y seront encore quoiqu'il ne reste du plan AKG que la ligne inflexible MCN, car la courbure de la roue & du cylindre ne servent qu'à faciliter le mouvement ; d'où l'on voit que le tour est une espece de levier.

PROPOSITION V.

37. *Dans le Tour ou Treuil si la puissance est au poids comme le rayon du rouleau est au rayon de la roue, il y a équilibre.* [Fig. 18.]

De l'appui F qui est le même que le centre C de la roue, il faut mener FA, FD perpendiculaires aux directions MP, NR elles ne sont point différentes des rayons CM, CN (14. *Géom.*) ; car les directions MP, NR touchent l'une la circonférence de la roue, l'autre celle du rouleau ; puisqu'étant prolongées en ligne droite vers le côté opposé, elles ne rencontreroient point les circonférences, ce qui est évident. Cela posé, l'hypothèse donne P.R :: CN.CM : or les rayons CM & CN sont égaux aux perpendiculaires FA, FD ; donc P . R :: FD . FA : ainsi les directions MP, NR étant supposées en un même plan, les puissances sont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires menées de l'appui F aux mêmes directions (3. *Arith.*) ; donc il y auroit équilibre si les puissances étoient dirigées suivant ce plan (15) ; mais puisque le poids reçoit la même

impression soit que l'on suppose que les plans des directions se confondent en un, soit qu'ils coupent l'axe en differens points, il s'ensuit que si ces plans sont éloignés l'un de l'autre dans une situation semblable par rapport à l'axe, comme s'il n'en faisoient qu'un, il y aura encore équilibre.

38. *Corollaire.* Comme le rapport du rayon CN au rayon CM est le même, quelle que soit la direction MP de la puissance P dans le plan AKG, il s'ensuit que le rapport de cette puissance au poids R est un rapport constant; c'est-à-dire, que dans tous ces changemens de direction, il faut la même force pour soutenir le poids R; (on suppose que la puissance tire la roue suivant des directions qui en touchent la circonférence.) Mais si la puissance P tiroit le rouleau avec des simples batons sans roue, pour lors la direction MP pourroit s'approcher ou s'éloigner de l'appui F, ce qui changeroit le rapport inverse des perpendiculaires FA, FD ou des rayons CM, CN, il faudroit pour lors que le rapport de la puissance au poids reçût des changemens semblables (22), & que la puissance augmentât ou diminuât le poids R demeurant le même.

CHAPITRE II.

Du plan incliné, de la Vis, du Coin, & de la Machine funiculaire.

39. CES trois machines la Vis, le Coin, & la Machine funiculaire peuvent être rapportées au plan incliné; ainsi les principes qui nous auront guidés dans le plan incliné pourront leur être appliqués; c'est de cette maniere qu'après avoir établi les analogies propres au levier, il nous a été aisé de prouver celles de la poulie & du treuil.

Du plan incliné.

40. Dans le second Livre nous avons consideré le plan incliné comme une surface sur laquelle les corps glissent ou roulent d'eux mêmes à moins qu'ils ne soient arrêtés par un obstacle ou une puissance ; dans celui-ci nous le mettons au nombre des instrumens qui peuvent aider ou soulager une puissance qui a à soutenir ou à mouvoir un fardeau.

41. Dans tous les corps il y a un centre de gravité, c'est-à-dire, un point où toute la pesanteur est comme réunie, en ce que si ce point est en repos, toutes les parties du corps pesant y sont aussi, à moins que leur équilibre ne soit troublé par une force étrangere. (*Liv. II.* 8. 10).

Un corps qui est sur un plan incliné le touche par une partie de sa surface ; on peut l'appeller *la base* du corps.

42. Lorsqu'un corps est en équilibre sur un plan incliné, les directions sçavoir du corps, de la puissance & de la résistance concourent en un point (13), & si le corps est sphérique, c'est au centre du globe qu'elles concourent ; car la direction de la pesanteur passe par le centre, celle de la résistance du plan y passe aussi, puisque le plan résiste suivant la perpendiculaire élevée au point de contingence (14), laquelle passe par le centre (14.*Géom.*); donc les trois directions concourent au centre de la Sphere.

43. Le plan des directions est vertical, de plus il passe par le centre de la Sphere, & par le point d'attouchement ; donc il coupe le plan incliné suivant sa longueur, car il n'y a qu'un tel plan qui ait ces trois conditions à la fois, ce qu'il est aisé d'imaginer. Par conséquent si le poids glisse ou tourne par sa pesanteur sur le plan incliné, le centre C & le point d'attouchement F, lorsque ce point quitte le plan incliné, sont mûs sur ce plan vertical : la même chose arrive si la puissance P dont la direction est aussi sur ce plan, surmonte la pesanteur du poids R.

bles, car les angles S & H pris ensemble valent un angle droit (5. *Géom.*), de même les angles CFD, DFI pris ensemble valent un angle droit par la construction, deplus l'ang. H & l'ang. DFI sont égaux (29. *Géom.*) ; donc les angles CFD & OSH sont égaux, d'ailleurs les angles D & O sont droits ; donc les triangles OSH, DFC sont semblables (8. *Géom.*) ; donc DF . CF :: OS . SH ; l'hypothèse donne P . R :: OS . SH ; donc P . R :: DF . CF ; (14. *Arith.*) c'est-à-dire, que les puissances P, R sont entr'elles réciproquement comme les perpendic. menées de l'appui F aux directions (3. *Arith.*) ; donc il y a équilibre (44).

47. 2°. *Lorsque la puissance tire parallelement à la base* OH *du plan incliné* [Fig. 21.] *si elle est au poids comme la hauteur du plan incliné est à sa base, il y a équilibre.* Car nous venons de voir que le triangle DFC est semblable au triangle OSH ; donc OS . OH :: FD . DC : or FA est égale à DC, car FA est perpendiculaire à la base OH (4. *Géom.*), puisqu'elle est perpendiculaire à CP ; CN est aussi perpendiculaire à OH ; donc FA & CN sont paralleles (28. *Géom.*) ; donc les angles alternes AFC, FCD sont égaux (29. *Géom.*) ; donc les triangles ACF, DCF sont égaux en tout (20. *Géom.*) ; donc AF=CD. Cela posé l'hypothèse donne P . R :: OS . OH ; donc P.R :: FD . DC ou FA. (14 *Arith.*) C'est-à-dire, que les puissances P, R sont entr'elles réciproquement comme les perpendicul. menées de l'appui F aux directions (3. *Arith.*) ; donc il y aura équilibre (44).

48. 3°. Si l'on considere CF (*Fig.* 19. 20.) comme rayon ou sinus total, les arcs FM, FN sont les mesures des angles FCM, FCN, & les perpendiculaires FA, FD sont les sinus de ces angles ou de ces arcs qui les mesurent (21. *Géom.*), c'est pourquoi si les puissances P, R sont entr'elles réciproquement comme les sinus des angles formés par leurs directions & celle de la résistance, il y aura équilibre.

49. 4°. *Lorsque la direction de la puissance est parallele au plan incliné, l'effort qu'elle fait pour soutenir le même poids*

poids R *est le plus petit qu'elle puisse faire.* Car l'angle DCF [*Fig.* 21.] demeurant le même, son sinus FD est constant, il n'y a donc que le sinus de l'angle FCP qui change : or lorsque la direction CP est parallele au plan incliné, l'angle FCP est droit, & parconséquent son sinus est le plus grand qu'il se puisse (21. *Géom.*); par conséquent le sinus FD est pour lors le plus petit; donc la puissance P qui est représentée par le sinus FD est pour lors la plus petite.

50. Les propositions inverses de ces Corollaires sont aussi vraies : c'est-à-dire, que dans l'équilibre 1°. si la direction CM ou CP est parallele au plan incliné, la puissance est au poids comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur. 2°. Si la direction CM ou CP est parallele à la base du plan incliné, elle est au poids comme la hauteur à cette base. 3°. Que les puissances P, R sont dans la raison réciproque des sinus des angles formés par leurs directions & celle de la résistance du plan. 4°. Que si la puissance P est la moindre qui puisse faire équilibre avec le même poids R, sa direction est pour lors parallele au plan incliné.

Ces propositions sont autant de Corollaires qui suivent de l'art. 45, & il n'est pas plus difficile de les déduire que les précedens de l'art. 44.

De la charge du plan incliné.

51. Il ne faut pas confondre la charge du plan incliné SH avec la partie du poids R que ce plan soutient, ni l'autre partie avec la puissance P : car l'effort que la puissance P est obligée de faire est plus grand que la partie du poids qu'elle soutient, parce qu'en réagissant contre le poids R, elle presse nécessairement le plan incliné : ainsi la charge de ce plan n'est pas seulement l'effet du poids R ou de la partie de ce poids que le plan soutient, mais elle résulte du poids R & de la puissance P, & est égale à l'effort composé de ces deux puissances.

52. *La charge du plan incliné est à l'une des puissances, par exemple, au poids* R, *comme le sinus de l'angle* NCM [Fig. 19.] *formé par les directions* CM, CN *est au sinus*

de l'angle FCM. Il faut concevoir que la masse du poids R est détruite, & qu'il ne reste que les lignes FD, FA perpendiculaires aux directions, la pesanteur du poids R étant conçue appliquée au point D de sa direction, nous aurons le levier courbé AFD sur lequel les puissances R, P, & la résistance de l'appui sont en équilibre; si l'on conçoit encore que cette résistance est suppléée par une puissance F, & que la puissance P fait l'office de la résistance, il sera aisé de conclure des art. 28. 29. que la résistance de l'appui ou la puissance F qui la représente est au poids R comme le sinus de l'angle NCM est au sinus de l'angle FCM, de même la résistance du plan est à la puissance P comme le sinus de l'angle MCN est au sinus de l'angle FCN.

Si on a recours au mouvement composé, il est aisé d'appercevoir que cette charge est représentée par la diagonale CF du parallelogramme GI [*Fig.* 20.] formé sur les directions; qu'ainsi elle est aux puissances P, R comme la diagonale CF est aux côtés CG, CI du parallelogramme GI, ou bien comme le côté CF du triangle CGF est aux deux autres côtés CG, GF du même triangle, & mettant les sinus des angles opposés au lieu des côtés, il sera aisé de conclure que la charge du plan incliné est à la puissance R comme le sinus de l'angle NCM est au sinus de l'angle FCM : cette charge est aussi à P comme le sinus de NCM est au sinus de FCN. (*Liv. I.* 83.) & (21. *Geom.*)

53. *Corollaires.* Lorsque la direction CMP [*Fig.* 21.] est parallele au plan SH, les angles CIF, MCN sont supplément l'un de l'autre (29. *Géom.*); donc ils ont le même sinus (21. *Géom.*), & l'angle FCM est égal à son alterne IFC; donc la charge du plan & le poids R qui sont dans la raison des sinus des angles MCN, FCM, sont aussi dans la raison des sinus des angles CIF, IFC du triangle CIF, lesquels sont aussi dans la raison des côtés opposés CF, CI (21. *Gé m.*) : or le triangle CIF est semblable au triangle HSO; donc la charge du plan & le poids R qui sont comme les côtés CF, CI sont aussi comme la base HO, & la longueur HS.

54. On fera voir de la même maniere que si la direction CAP de la puissance est parallele à la base OH, la charge du plan & le poids R sont comme les côtés CF, CD du triangle CDF : or ce triangle est aussi semblable au triangle HOS ; donc la charge du plan & le poids R sont pour lors comme la longueur HS & la base HO.

Nous ne nous arrétons point à déterminer quelle est la partie du poids R que le plan incliné soutient, ni celle qui est supportée par la puissance P, parce qu'il y a peu d'occasions où l'on ait besoin de ces déterminations ; ou bien on peut voir ce qui en est dit dans les *principes*.

De la Vis.

55. La Vis est un cylindre sur la surface duquel on a entaillé un cordon solide qui l'entoure en forme de ligne spirale, de maniere qu'il est partout également incliné à la hauteur ou longueur du cylindre. Chaque tour du cordon spiral est appellé *spire* ou *helice* ; il y a des auteurs qui l'appellent pas de la vis, & ils appellent hauteur du pas de la vis, la distance d'une spire à la suivante ; il y en a au contraire qui prennent pour pas de la vis, la distance ou intervalle qui est entre deux spires : cette distance se mesure suivant la longueur du cylindre. Si le cordon spiral est sur la surface convexe ou extérieure du cylindre, la vis est appellée *vis intérieure* ou simplement *vis* ; si le cordon est sur la surface concave ou intérieure d'un cylindre creux, la vis est appellée *vis extérieure* ou *écrou*. Si le diametre de l'écrou est égal au diametre de la vis, & que les intervalles des spires soient égaux, pour lors la vis pourra entrer dans l'écrou, & les spires de l'une des pieces s'ajusteront parfaitement aux spires de l'autre, & si on fait tourner l'un des cylindres, les spires de l'un glisseront sur les spires de l'autre, comme sur des plans inclinés. Si on dévelope une portion de la vis ou de l'écrou entourée d'une spire ou hélice, on aura un parallelog. rectangle dont la diagonale ANB [*Fig.* 22.] est l'hélice dévelopée, la hauteur AB l'intervalle qui est entre deux spires, & la base AA ou BB la circonfér. de la base du cylin-

dre. Le mouvement ſpiral de la vis ou de l'écrou ſe décompoſe en deux, l'un par lequel tous les points du cordon ſpiral mobile tournent autour de l'axe GH ; l'autre par lequel ils avancent ſuivant la longueur du même axe : or la vis preſſe non par le mouvement circulaire, mais par le mouvement progreſſif, & par conſéquent ſuivant des directions paralleles à l'axe du cylindre ; de ſorte que ſi la vis mobile rencontre dans ſon mouvement progreſſif un obſtacle, la réſiſtance qu'il fait retombe toute entiere ſur cette vis mobile, laquelle preſſe auſſi la vis immobile contre laquelle elle s'applique. La vis mobile eſt donc comme un poids qui preſſe la vis immobile ſuivant des directions paralleles à l'axe.

56. D'où il ſuit que ſi la puiſſance étoit immédiatement appliquée à la vis mobile, l'analogie de cette machine ne ſeroit pas différente de celle du plan incliné ; mais la puiſſance agit ſur la vis mobile avec un levier ; & pour en voir l'uſage, imaginons qu'il ne reſte de l'écrou & de la vis que le cordon ſpiral, tout le reſte du cylindre étant percé à jour ; que le point N où le levier ONM [*Fig.* 22.] rencontre le cordon mobile eſt un bouton ou crochet ſur lequel le levier peut s'appuyer, tandis qu'il porte par ſon extrémité O ſur l'axe immobile GH, il eſt viſible que les points de l'axe GH ſervent ſucceſſivement d'appui au levier OM, & que ſi la puiſſance tire ſuivant la direction MP, le bouton N étant pouſſé par cet effort fait gliſſer le cordon ſpiral mobile ſur celui qui eſt immobile : d'où l'on voit que la vis eſt une machine compoſée d'un plan incliné, & d'un levier du ſecond genre dont l'appui eſt à l'extrémité O & le poids R ou la réſiſtance qui en fait l'office, entre l'appui & la puiſſance ; cette réſiſtance eſt égale à celle que le bouton N trouve à avancer ſuivant la longueur de l'axe ou du cylindre.

Nous ſuppoſerons dans la propoſition ſuivante comme on fait ordinairement, que la puiſſance P tire ou pouſſe ſuivant une direction parallele à la baſe du cylindre, & perpendiculaire au levier.

PROPOSITION VII.

57. *Dans la vis si la puissance* P *appliquée au levier* OM *est à la résistance de l'obstacle, comme l'intervalle qui est entre deux spires est à la circonférence décrite par le point* M *auquel la puissance est appliquée, il y a équilibre.* [Fig. 22.]

Démonstration. La direction MP est parallele à la base du cylindre & perpendiculaire au levier OM, c'est-à-dire, au rayon de la circonférence décrite par le point M, elle est donc tangente & par conséquent parallele à cette circonférence dévelopée (14. *Géom.*), elle seroit aussi parallele à la circonférence BDB dévelopée si le dévelopement commençoit au point K, c'est-à-dire, parallele à la base du plan incliné ; de plus la direction de la résistance ou du poids R est perpendiculaire à la même base BDB du plan incliné ANB, puisqu'elle est parallele à l'axe ou à la longueur du cylindre ; donc si la puissance P étoit appliquée immédiatement au point N du plan incliné, & qu'elle fut à la résistance R comme la hauteur AB qui est l'intervalle de deux spires, est à la base BDB qui est la circonférence du cylindre, il y auroit équilibre (47) ; mais si la direction MP est, par exemple, trois fois plus éloignée de l'appui O, il suffit que la puissance P fasse un effort trois fois moindre (22) ; cette force sera donc à la résistance R comme AB à 3BDB (18. *Arith.*) : or puisqu'on suppose que le rayon OM est triple du rayon ON, la circonférence décrite par le point M est triple de BDB ; donc si la puissance P est à la résistance R comme l'intervalle qui est entre deux spires, est à la circonférence décrite par le point M, il y a équilibre.

58. *Corollaire.* Plus l'intervalle AB qui est entre deux spires est petit, plus la force nécessaire pour résister au poids R ou pour surmonter la résistance qu'il représente est aussi petite.

Dans cette mnchine le frottement est grand, & il consume inutilement une bonne partie de la force P.

DU COIN.

59. Le Coin ordinaire est un corps ou solide qui a la figure d'un prisme triangulaire. EG [*Fig*. 23.] est le taillant ; ABCD la tête ou la base, ABGE, DCGE sont les faces par lesquelles le coin s'applique à l'obstacle qu'on veut lui faire surmonter ; DAE, BCG sont deux triangles qui donnent au solide la figure d'un prisme triangulaire.

On se sert du coin pour élever des poids ou fardeaux à une petite hauteur, ou bien pour fendre & diviser les corps.

Du Coin en tant qu'il sert à élever des poids ou fardeaux.

60. Dans le coin en tant qu'il éleve un poids il faut considérer deux puissances, l'une qui retient le poids R suivant une direction CO [*Fig*. 24.], l'autre qui pousse le coin suivant la direction MP : la pesanteur du poids R & la puissance qui le tire suivant CO se composent en un effort perpendiculaire au plan incliné AD : or cet effort qui fait la charge du plan AD étant oblique au plan LL sur lequel le coin est posé, il faut une force P qui l'empêche de glisser sur ce plan. La force P varie selon que la direction CO de la puissance qui retient le poids sur le plan AD fait différens angles avec ce plan.

61. *Lorsque la direction* CO [Fig. 24.] *de la puissance qui retient le poids* R *sur le plan incliné est parallele à ce plan, la puissance* P *qui pousse le coin est au poids* R *comme le produit de la base* DB *& de la hauteur* AB *est au quarré de la longueur* AD, *c'est-à-dire* $P . R :: DB \times AB . \overline{AD}^2$.

Si l'on nomme F la charge du plan dirigée suivant CF, nous aurons R . F :: AD . DB (53). Cela posé, la charge F étant oblique au plan LL, le coin ABD est comme un poids qui est retenu par la puissance P sur le plan incliné BD, qui a pour base B*d* perpendiculaire à CF ou parallele

à AD, & pour hauteur D*d* : or la puissance P pousse ou retient le corps ABD sur le plan LL ou BD suivant une direction MP parallele au plan; donc F. P :: DB. *d*D (46), & parce que les triangles ADB, D*d*B sont semblables P & F sont aussi comme AD, AB (8, 4. *Géom.*) Voici les deux proportions qu'on a faites. Si on multiplie par ordre, & que l'on divise les deux premiers produits par F, on aura après avoir fait le changement *invertendo*, P. R :: DB×AB. $\overline{AD}^2$. (21. *Arith.*)

R. F :: AD. DB
F. P :: AD. AB
R. P :: $\overline{AD}^2$. DB×AB

62. *Si la direction* CO *est parallele à la base* DB, *la puissance* P *est au poids* R *comme la hauteur* AB *est à la base* BD [*Fig.* 24]. Car dans l'hypothèse F. R :: AD. BD (54); or P. F :: AB. AD, comme il vient d'être prouvé; donc si après qu'on aura multiplié par ordre on divise les deux premiers produits par F, & les deux derniers par AD, on trouvera que P. R :: AB. BD.

63. Dans les autres cas de la direction CO, pour avoir le rapport de la puissance P au poids R, il faut multiplier la hauteur AB, & la longueur AD par les sinus S des angles GCN, GCF & l'on aura P. R :: AB×S. GCN, AD×S. GCF.

Du coin en tant qu'il est employé à fendre.

64. Pour traiter ce point avec une étendue convenable, il faudroit entrer dans la résistance des solides, examiner leurs différens degrés de dureté, de mollesse, de flexibilité, d'extensibilité & de fragilité, pour apprendre de quelle maniere ils se fendent, car c'est de-là que dépend la force du coin.

65. Pour donner une idée de cette force, nous supposerons comme on fait ordinairement 1°. que les côtés de la fente s'appliquent aux faces du coin par une partie de leur surface, & que ces mêmes côtés sont étroitement liés par des fibres transversales qui s'étendent ou s'allongent par la force du coin; ces fibres ainsi allongées occupent une cer-

taine étendue ſuivant la longueur de la fente : or quoique l'on ignore quelle eſt cette étendue, on peut ſuppoſer qu'elles commencent à s'allonger au point S [Fig. 35], & qu'elles ceſſent de l'être au point O : celles qui ſont au-deſſus de S ayant été rompues par la force du coin, & celles qui ſont au-deſſous de O étant encore dans leur état naturel : on peut concevoir auſſi que ces fibres ainſi diſtribuées dans l'eſpace OS, & dont les unes réſiſtent plus, & les autres moins, ſelon qu'elles ſont plus ou moins éloignées de O, font une réſiſtance totale qui ſe fait ſentir, & qui eſt réunie en un point R ſitué entre O, S : cela étant, chaque côté de la fente eſt un levier dont l'appui eſt en O ; la réſiſtance ou le poids à ſurmonter en R ; & la force ou puiſſance qui tire le levier, aux points E, F où le coin touche les côtés de la fente. 2°. La force P qui pouſſe le coin étant ſuppoſée perpendiculaire à la tête AB ſe décompoſe en deux efforts qui tendent à écarter les côtés de la fente ſuivant des directions perpendiculaires à ces côtés, & aux faces du coin ; car la preſſion qu'un corps exerce ſur un autre eſt perpendiculaire à la ſurface commune par laquelle ils ſe touchent (14). 3°. Imaginons que le coin ADB eſt diviſé en deux parties par la ligne PDO, qui eſt comme un plan inflexible ſur lequel chaque coin partiel peut avancer en écartant les côtés de la fente ; il eſt certain que les efforts CF, CF perpendiculaires aux faces du coin & aux côtés de la fente ſont obliques au plan PDO, il eſt donc néceſſaire que la puiſſance P leur réſiſte, autrement chaque coin ſeroit chaſſé hors de la fente.

Comme nous avons ſuppoſé le coin ADB diviſé en deux coins partiels, nous ſuppoſerons auſſi la force P diviſée en deux forces partielles $p+p$ dont chacune pouſſe l'un des coins partiels ſuivant PDO ; de même parce que les fibres réſiſtent également en ſens contraire la réſiſtance totale R ſera conçue partagée en deux réſiſtances partielles qui ſe font l'une vers la droite, l'autre vers la gauche, & nous les nommerons r.

Il ſuit & de la preuve de l'art. 61 que p eſt à la charge E ou F comme AG eſt à AD.

PROPOSITION. VIII.

66. *Dans l'équilibre la puissance* P *est à la résistance* R *comme* AB×OR *est à* AD+DB×EO [*Fig.* 25]; c'est-à-dire, que pour avoir le rapport de la puissance P à la résistance R, il faut multiplier les distances à l'appui O prises dans un ordre renversé, par la tête AB du coin, & par la somme des faces AD+DB.

I. Démonst. Car puisque la puissance P pousse le coin ABD parallelement à PDO, chaque force partielle *p* pousse aussi le coin partiel auquel elle est supposée appliquée, suivant PDO; donc si nous nommons E, la charge du plan AD dirigée suivant EC, nous aurons *p*. E : : AG. AD (61) : or par la propriété du levier la charge ou résistance qui agit en E est à la résistance partielle *r* comme OR est à OE, c'est-à-dire, E. *r* : : OR. OE (15) : donc après avoir multiplié par ordre les termes de ces proportions & avoir divisé les deux premiers produits par E, nous avons *p*. *r* : : AG×OR. AD×OE (21. *Arith.*); donc en doublant ces quatre termes nous avons P. R : : 2AG×OR. 2AD×OE (8. *Arith.*) C'est la proportion qu'il falloit prouver en mettant AB au lieu de 2AG, & AD+BD à la place de 2AD : car nous supposons que le coin ABD est isoscele.

II. Démonst. La puissance P [*Fig.* 25] se décompose en deux efforts perpendiculaires aux côtés de la fente (*Liv. I.* 75.) lesquels sont entr'eux & à la force P qui pousse le coin comme les côtés CH, CI du parallelogramme HI sont entr'eux & à la diagonale CS qui exprime la force P (75): or parce que la puissance P pousse le coin isoscele suivant PDO perpendiculaire au milieu de la tête AB il s'ensuit que les efforts suivant CH, CI sont égaux; donc les côtés du parallelog. HI sont égaux, & les triangles CSH, CSI isosceles (2. *Géom.*); de plus les triangles rectangles CDE, ADP sont semblables (8. *Géom.*), puisqu'ils ont l'angle EDC commun; donc l'angle DCH est égal à l'angle DAP, donc les triangles isosceles SCH, ABD ayant un

angle égal sont semblables. Cela posé, nous avons la puissance P est à l'effort E, comme CS est à CH (*Liv. I.* 75), ou bien comme AB est à AD, c'est-à-dire, P. E : : AB. AD; & par la propriété du levier l'effort E est à la résistance partielle *r* comme OR est à OE (15), c'est-à-dire, E. *r* : : OR. OE; après avoir multiplié par ordre & avoir divisé les deux premiers produits par E, nous avons P. *r* : : AB×OR. OE×AD (8. 21. *Arith.*); & doublant le second & le quatriéme terme, nous aurons P. R : : AB×OR. OE×2AD. (8. *Arith.*)

De la Machine funiculaire.

67. Cette Machine peut être rapportée au levier ou au plan incliné, & être démontrée par le principe des forces composées.

I. Démonst. Il est évident que si du point F [*Fig.* 26] où la direction FCS rencontre le corps on mene la perpendiculaire OL, cette ligne étant conçue inflexible est comme un plan incliné qui résiste suivant la perpendiculaire FCS (14); la puissance S qui tire suivant FCS ne fait donc rien de plus pour soutenir le poids R que ce que le plan OL fait. Pareillement si du point D où la direction CP rencontre le corps R on mene la perpendiculaire DI, cette ligne étant conçue inflexible résiste suivant DCP & fait tout autant que la puissance P qui tire suivant DCP. *C'est pourquoi si les puissances* P, S *sont au poids* R, *sçavoir* P *comme le sinus de l'angle* FCN *est au sinus de l'angle* FCM *ou de son supplément* DCF; *& la puissance* S *comme le sinus de l'angle* DCN *est au sinus de l'angle* DCS *ou de son supplément* DCF, *il y a équilibre* (48).

On fera voir de même que la résistance en F ou la puissance S est à la puissance P comme le sinus de l'angle MCN ou de son supplément DCN est au sinus de l'angle FCN (52) : ainsi les trois puissances P, R, S prises deux à deux étant entr'elles réciproquement comme les sinus des angles que leurs directions font avec la direction de celle qui n'entre point dans la proportion, sont en équilibre.

II. *Dém.* On suppose que P. R : : *sin.*ACG. *sin.*ACM ; & que S. R : : *sin.*GCM. *sin.*ACM ; & que S. P : : *sin.*GCM *sin.*ACG, c'est-à-dire, que les trois puissances P, R, S sont deux à deux entr'elles réciproquement comme le sinus des angles que leurs directions font avec la direction de celle des trois qui n'entre point dans la proportion. Il faut faire sur les trois directions le parallelog. ACMG dont la diag. CG soit sur celle du poids R, l'angle GCM est égal à l'angle AGC (29. *Géom.*), & l'angle ACM est supplém. de l'angle GAC (29. *Géom.*) ; donc au lieu des angles ACM, GCM, nous pouvons prendre leurs égaux GAC, AGC ; donc les trois puissances P, R, S qui sont représentées par les sinus des angles ACG, ACM, GCM, sont aussi représentées par les sinus des angles du triangle AGC : or les sinus des angles de ce triangle sont entr'eux comme les côtés opposés (21. *Géom.*) ; donc les puissances P, R, S sont aussi entre elles comme les côtés AG, GC, AC ; & parce que AG = CM (2. *Géom.*), elles sont aussi entr'elles comme les trois côtés du parallelogramme AGMC ; de plus la puissance R tire en sens contraire des deux autres ; donc ces trois puissances sont en équilibre (*Liv. I.* 83).

68. *Coroll.* Si l'angle des directions des puissances P, S, qui soutiennent le poids R devenoit infiniment grand, le sinus de cet angle seroit infiniment petit par rapport aux sinus des angles ACG, GCM, puisqu'un angle & son supplément ont le même sinus (21. *Géom.*) ; donc le poids R seroit alors infiniment petit par rapport aux puissances P, S ; & si le poids R étoit d'une grandeur finie, il faudroit que les puissances P, S fussent infiniment grandes, & pour lors les cordons CS, CP faisant ensemble un angle sensiblement égal à deux droits, seroient l'un & l'autre sur une même ligne droite : or comme dans la nature il n'y a point de force infiniment grande par rapport à une force finie (du moins nous ne la connoissons point) & que d'ailleurs les cordes ne peuvent résister à leur rupture que jusqu'à un certain point, il s'ensuit que si on suspend un poids d'une grandeur finie à une corde aucune force appliquée aux ex-

trémités, ne sera capable de la tendre en ligne droite. Delà vient encore que si la corde est d'une longueur un peu considérable, & de quelque pesanteur on la rompt plus facilement qu'on ne vient à bout de la tendre en ligne droite suivant la direction horizontale. Car si la pesanteur de la corde étoit toute réunie en un point elle lui feroit faire un pli sensible, comme lorsqu'on y suspend un poids ; mais parce que cette pesanteur est distribuée tout le long de la corde, chaque petit poids fait faire un pli qui à la vérité est insensible ; mais tous ces plis étant à la suite les uns des autres forment une courbure qui est sensible, & qu'il est comme impossible d'ôter à la corde.

CHAPITRE III.

Des Machines composées, de la Balance, & du Peson.

NOUS ne répétons point ici la définition de la Machine composée : voyez art. 5.

69. Dans les Machines composées chaque machine simple est tirée ou poussée de même que si elle étoit seule, & l'effort qui tend à la faire tourner est communiqué à la machine suivante laquelle agit aussi à son tour sur une autre machine simple ; de cette maniere l'effort qui est appliqué immédiatement à la premiere se transmet de machine en machine jusqu'à la derniere à laquelle le poids ou fardeau est attaché : d'où l'on voit que l'impression que chaque machine simple reçoit a deux rapports ; 1°. Elle est l'effet de la cause qui a agi sur cette machine, 2°. Cette impression est elle-même une cause qui agit aussi sur la machine immédiatement suivante.

70. Les machines composées peuvent différer entr'elles en bien des manieres, selon le génie de celui qui les invente, & selon le besoin de celui qui les fait construire. Les moufles, les roues dentées, la vis sans fin, &c. sont celles dont on se sert plus ordinairement.

Des Mouffles.

71. La Mouffle eſt un aſſemblage de pluſieurs poulies ; dont les unes ſont fixes, & les autres mobiles. Les poulies mobiles ſont toutes renfermées dans une même chappe, & les poulies fixes dans une autre : l'une eſt appellée *Mouffle mobile*, l'autre *Mouffle fixe*. Il y a deux manieres de mouffler les poulies ; dans l'une toutes celles de la mouffle mobile ſont traverſées par un même aiſſieu ou tourillon, & toutes celles de la mouffle fixe par un autre : dans la ſeconde eſpece de mouffle, chaque poulie a ſon tourillon comme ſi elle étoit ſeule. La maniere d'agir de la puiſſance eſt la même dans ces deux eſpeces de mouffles, & le rapport qu'elle a au poids ou fardeau n'eſt point différent. Il y a une troiſiéme maniere de mouffler les poulies, c'eſt de faire en ſorte qu'elles ſoient toutes mobiles, excepté celle à laquelle la puiſſance eſt immédiatement appliquée. Nous figurerons ſeulement la ſeconde & la troiſiéme eſpece de mouffle ; car la premiere ſe rapporte à la ſeconde.

72. 1°. La corde qui embraſſe toutes les poulies eſt attachée à la chappe fixe, ou à celle qui eſt mobile, & la puiſſance tire l'autre bout, & le poids eſt ſuſpendu au bas de la chappe mobile.

73. 2°. Les différens tours de la corde peuvent être paralleles ou concourir étant prolongés ; lorſqu'ils ſont paralleles la ligne droite qui joint les points d'attouchement de la corde paſſe par le centre.

74. 3°. Dans l'équilibre la corde eſt par-tout également tendue, ſans quoi la partie qui ſeroit plus lâche céderoit à celle qui ſeroit tirée plus fortement.

75. 4°. Lorſque les directions ſont paralleles la peſanteur du poids R ſe diſtribue également à toutes les poulies mobiles ; en ſorte que s'il y en a trois, chacune ſoutient le tiers du poids R. Car s'il n'y avoit que la poulie M [*Fig.* 27.] elle porteroit ſeule le poids R ; mais les poulies N, O ſont tirées de bas en haut chacune avec une force égale à celle qui ſoutient la poulie M, puiſque la corde eſt égale-

ment tendue dans sa longueur, & que d'ailleurs les portions de cette corde étant semblablement dirigées résistent de la même maniere; donc les trois poulies mobiles M, N, O sont également chargées, & puisqu'elles ne soutiennent que le poids R, il s'ensuit que chacune en soutient le tiers.

76. 5°. Les portions de corde qui joignent deux poulies, l'une fixe, l'autre mobile, sont tirées chacune en deux sens opposés de haut en bas par le poids R, & de bas en haut par la résistance des poulies fixes; de-là vient que ces efforts contraires se détruisent, & que la puissance P n'a à soutenir que la charge que le poids R produit au point K.

PROPOSITION IX.

77. *Si les directions de la corde dans ses différens tours sont paralleles, la puissance est au poids comme l'unité est au double du nombre des poulies mobiles* [Fig. 27].

On suppose que l'extrémité S de la corde est attachée à la chappe fixe.

La charge du poids R se distribue également aux poulies mobiles, dans la figure présente le tourillon de chaque poulie mobile est chargé du tiers du poids R; de plus la puissance P ne soutient que la moitié du poids X, qu'on suppose être le tiers du poids R (35); donc la puissance P ne soutient que la sixiéme partie du poids R; donc elle est à ce poids comme 1 est à 6, c'est-à-dire, comme l'unité est au double des poulies mobiles.

Si l'extrémité S [*Fig.* 28.] est attachée à la chappe mobile, ce point sera tiré en haut avec un effort égal à celui qui est en G ou en K, ainsi si le poids R est conçu divisé en cinq parties lorsqu'il y a deux poulies mobiles, en sept lorsqu'il y en a trois, &c. Les centres des poulies mobiles en soutiendront chacun deux, & le point S une; c'est pourquoi la puissance P est au poids R comme l'unité est au double des poulies fixes augmenté de l'unité.

78. On pourroit dire encore que la puissance est au poids comme l'unité est au nombre des cordons en supposant que la puissance P agit immédiatement sur la premiere poulie mobile.

79. Nous avons supposé que les directions sont paralleles, si elles concouroient, le rapport de la puissance au poids seroit un peu plus grand que celui qui vient d'être déterminé; car nous avons vu en parlant de la poulie simple, que dans le cas où les directions concourent, la force nécessaire pour soutenir le même poids est plus grande que lorsque les directions sont paralleles. On peut voir ce qu'il y a là-dessus dans les *Principes*.

80. On peut démontrer cette machine immédiatement par le principe de M. Descartes. Supposons que le poids R monte d'un pied, il est évident que la puissance étant appliquée à la premiere poulie mobile, parcourra autant de pieds qu'il y a de cordons; car chaque cordon s'accourcit d'un pied; donc si la puissance est au poids comme l'unité est au nombre des cordons ou au double des poulies mobiles, ou bien comme le double des poulies mobiles augmenté de l'unité lorsque le point S est attaché à la chappe mobile [*Fig.* 28], la puissance & le poids sont entr'eux réciproquement comme les espaces, sçavoir que la puissance P parcourroit suivant sa direction, & le poids R contre la sienne; donc il y a équilibre (8).

81. Dans la troisiéme maniere de mouffler les poulies, chaque poulie mobile a son cordon à part, l'une des extrémités est attachée à un point fixe, & l'autre à la chappe de la poulie mobile suivante, le cordon de la derniere poulie mobile est arrêté par un bout à un point fixe, & l'autre bout passe par-dessus une poulie fixe, & est tiré par la puissance P [*Fig.* 29].

82. *Dans cette machine la puissance est au poids comme l'unité est au nombre 2 élevé au degré de puissance marqué par le nombre des poulies mobiles* [Fig. 29]. Il est évident que la poulie Y ne soutient que la moitié du poids R suspendu à la chappe de la poulie X, & la puissance P ne soutient que la moitié de celui de la poulie Y, c'est-à-dire, le quart du poids R (35); donc la puissance P est au poids R comme 1 est à 4, c'est-à-dire, au quarré de 2. S'il y avoit 5 poulies mobiles, il faudroit élever le nombre 2 à la cin-

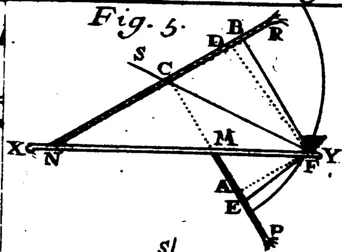
quiéme puissance, car la seconde poulie mobile soutiendroit la moitié du poids, la troisiéme la 4e, la quatriéme poulie la 8e, la cinquiéme la 16e partie du poids, & la puissance P appliquée à la poulie fixe la trente-deuxiéme partie de ce poids.

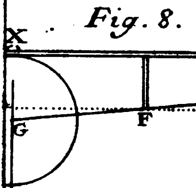
Des Roues à dents.

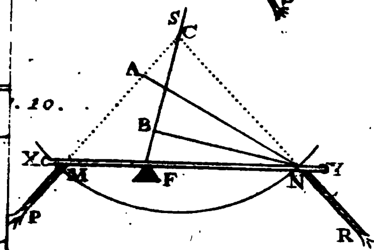
83. Les roues à dents ont leurs circonférences divisées en un certain nombre de dents égales & également distantes les unes des autres. Si on joint plusieurs de ces roues de maniere que les unes agissent sur les autres, par un effort qui tende à les faire tourner, on aura une machine composée de roues à dents, autrement *rouage*. Pour qu'une roue puisse en faire tourner une autre, on taille son rouleau, & on lui donne un certain nombre de dents qui engrainent dans les dents de la roue suivante : un rouleau ainsi divisé est appellé *pignon*. Une roue & son pignon ont un même axe, qui est supporté par deux appuis. La premiere roue n'a point de dents, & la derniere est sans pignon. Au lieu de pignons on se sert quelquefois de lanternes : ce sont des cylindres creux qui ont pour bases deux plateaux paralleles entr'eux qui tiennent l'un à l'autre par le moyen de bâtons ou fuseaux qui les traversent, & qui étant à égales distances les uns des autres forment le contour du cylindre.

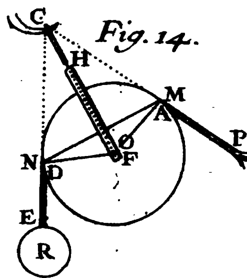
84. Si l'on conçoit que des roues & de leurs pignons [*Fig.* 30], il ne reste que les diametres & les dents qui sont à leurs extrémités, par lesquelles les pignons rencontrent les roues, on aura une suite de leviers qui agissent les uns sur les autres : la puissance P tire le levier BM dont l'appui est en A suivant la direction MP, & tend à faire tourner le levier BD, dont l'appui est en C ; le levier BD agit sur le levier DF dont l'appui est en E ; & le levier DF presse sur le levier FH dont l'appui est en G. Les bras AM, BC, DE, FG représentent les demi-diametres des roues, & les bras AB, DC, EF, GH représentent les rayons des pignons.

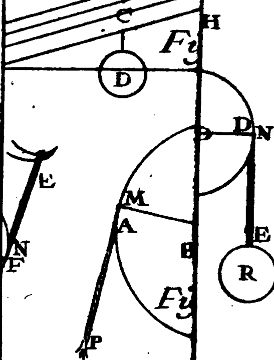
PROPOSITION

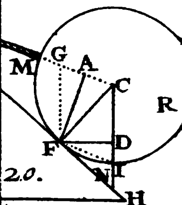

Fig. 5.
B
R
D
S
C
M
X
N
Y
F
A
E
P

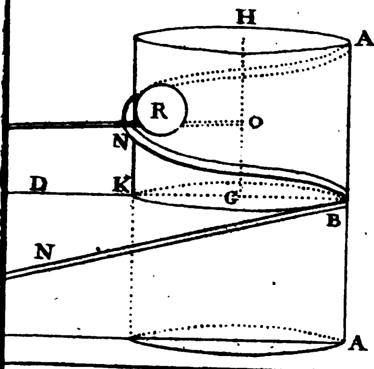

Fig. 8.
X
G
F

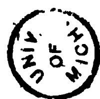

. 10.
S
C
A
B
X
M
F
N
Y
P
R

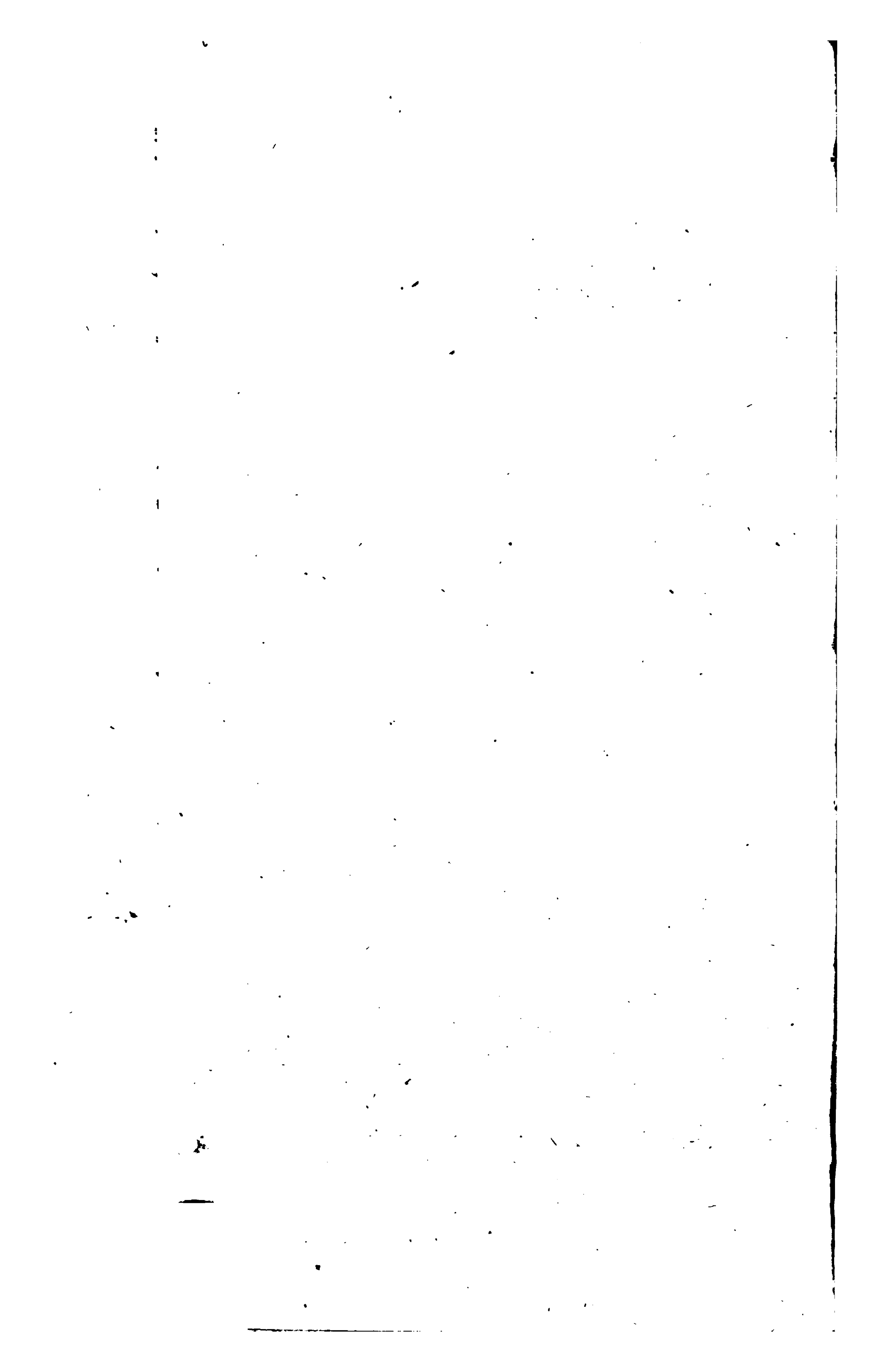

C
Fig. 14.
H
M
A
O
N
D
F
P
E
R


C
H
D
D
N
E
M
A
N
F
E
R
P


M
G
A
C
R
F
D
N
I
H
20.


H
A
R
O
N
D
K
G
B
N
A





PROPOSITION X.

85. *Dans les roues à dents* [Fig. 30.] *la puissance est au poids comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues.*

I. *Démonst.* Soit nommé X l'effort que la puissance P exerce au point B, Y l'effort qui se fait au point D, Z l'effort qui se fait en F. Par la propriété du levier nous avons quatre proportions, autant qu'il y a de leviers, & l'effort X que la puissance P produit en B, est une cause qui agit au point D, & y produit l'effort Y, l'effort Y produit en F l'effort Z, & l'effort Z tend à faire monter le poids R. Nous aurons donc (21); si l'on multiplie par ordre, & que l'on divise les deux premiers produits par XYZ (8. *Arith.*), l'on trouvera que P est à R comme le produit des rayons AB, DC, FE, GH des pignons, est au produit des rayons AM, CB, ED, GF des roues.

P. X : : AB. AM.
X. Y : : DC. CB.
Y. Z : : FE. ED.
Z. R : : GH. GF.

II. *Démonst.* Supposons que les quatre roues soient égales, & leurs pignons aussi, le diametre de la premiere roue étant supposé cinq fois plus grand que le diametre de son pignon, si ce pignon contient 6 dents, les autres pignons en contiendront aussi 6, & les roues trente chacune; car le nombre des dents doit être proportionnel au diametre ou à la circonférence, sans cela le mouvement seroit très-irrégulier, il se feroit par secousses, & la puissance perdroit inutilement une partie de sa force. Nous nommerons A la premiere roue [*Fig.* 30], C la seconde, E la troisiéme, G la quatriéme. Cela posé, tandis que la roue G fait un tour, le pignon de la roue E en fait 5, puisqu'il contient 5 fois moins de dents que la roue G qu'il rencontre; par une raison semblable, tandis que la roue E fait 5 tours, le pignon de la roue C en fait 25; & pendant que la roue C en fait 25, la roue A en fait 125, c'est-à-dire, 5 fois davantage: de sorte que si la puissance P étoit immédiatement appliquée au pignon de la roue A, elle parcourroit

un espace 125 fois plus grand que le poids R ; mais la circonférence que la puissance décrit est cinq fois plus grande que celle du pignon ; ainsi l'espace qu'elle parcourroit suivant sa direction, est 625 fois plus grand que celui que le poids R parcourroit contre la sienne : or le produit des rayons des pignons 1×1×1×1, c'est-à-dire, 1 est 625 fois moindre que le produit des rayons des roues 5×5×5×5, c'est-à-dire 625, de plus la puissance P & le poids R sont dans la raison de ces produits ; donc ils sont entr'eux réciproquement comme les espaces parcourus ; donc il y a équilibre (8).

De la Vis sans fin.

86. *I. Démonst.* La vis sans fin est composée d'une roue à dents, au rouleau de laquelle un poids est suspendu. Si l'axe de la roue est perpendiculaire à l'axe de la vis, l'effort K [*Fig.* 31], qui est produit à la rencontre des dents de la roue, & du cordon spiral, est parallele à la longueur du cylindre de la vis ou à son axe ; car cet effort qui tend à faire tourner la roue est dirigé suivant la tangente, par la propriété du mouvement circulaire, & par conséquent il est dirigé suivant l'axe de la vis ; de sorte que si la puissance P agit avec le levier ou manivelle SP suivant une direction parallele à la base du cylindre de la vis, elle est à l'effort K comme l'intervalle DG, qui est entre deux spires, est à la circonférence qu'elle décrit (57) ; & nommant C cette circonférence, nous aurons P. K : : GD. C ; de plus l'effort K est au poids R comme le rayon EA est au rayon ED (37), c'est-à-dire, K. R : : EA. EG. Si on multiplie par ordre les termes de ces deux proportions, qu'on divise les deux premiers produits par K (21. 8. *Arith.*), on trouve que P. R : : DG×EA. C×EG, c'est-à-dire, que pour l'équilibre il faut que *la puissance* P *&* *le poids* R *soient dans la raison du produit du rayon* EA, *du rouleau & de l'intervalle qui est entre deux spires, est au produit du rayon de la roue & de la circonférence décrite par la puissance.*

II. Démonst. Supposons que l'intervalle DG, qui est

entre deux spires, soit contenu, par exemple, 100 fois dans la circonférence de la roue, que la circonférence du rouleau soit le quart de celle de la roue, & que celle que la puissance décrit soit égale à celle de la roue, il est visible que la circonférence du rouleau contiendra l'intervalle DG 25 fois, & que la circonférence décrite par la puissance P le contiendra 100 fois. Cela posé, la roue en tournant n'avance que suivant la longueur de l'axe de la vis, puisque son axe est perpendiculaire à celui de la vis; donc tandis qu'un point de la roue parcourt un espace égal à DG, il faut que la puissance P fasse faire à la vis un tour; car un point du cordon spiral ne parcourt que cet espace suivant la longueur de l'axe, tandis que la vis fait un tour; donc tandis que la roue fera un tour, il faudra que la vis en fasse 100, puisque DG est contenu 100 fois dans la circonférence de la roue, & parce que la circonférence décrite par la puissance est 100 fois plus grande que DG, l'espace parcouru sera dix mille fois plus grand que DG, produit de 100 par 100; ainsi pendant que la roue feroit un tour, & que le poids parcourroit un espace égal à 25DG, la puissance en parcourroit un égal à 10000DG: or si on multiplie la circonférence que la puissance décrit égale à 100DG par le rayon de la roue, & l'intervalle DG par le rayon du rouleau, les produits seront 1×DG & 400DG; mais ces produits sont entr'eux réciproquement comme les espaces parcourus 10000 & 25; donc la puissance P & le poids R qui sont dans la raison de ces produits, sont aussi dans la raison réciproque des espaces qu'ils parcourroient l'un suivant sa direction, l'autre contre la sienne; donc ils sont en équilibre (8).

De la Balance.

87. La balance [*Fig.* 32] est une espece de levier dont les bras sont égaux. La justesse de la balance consiste dans la parfaite égalité des parties semblables qui sont de part & d'autre du point de suspension; comme la construction de cette machine a pour fondement l'égalité des poids

qu'on met de part & d'autre de ce point, il s'ensuit que les bras doivent être égaux (21); & si l'un étoit plus long que l'autre, ce seroit un défaut essentiel auquel il n'y auroit point de remede, sinon de les rendre égaux, & également pesans. Pour reconnoître si une balance a ce défaut, après avoir pesé, on met le poids au lieu de la marchandise, & la marchandise au lieu du poids, & l'on pese une seconde fois. Supposons que l'un des bras surpasse l'autre d'un huitiéme de sa longueur, ces bras sont entr'eux comme 8 & 7: or les poids qui feront équilibre avec cette balance seront entr'eux comme 7 & 8, c'est-à-dire, réciproquement comme les bras 8 & 7 (15.21); d'où l'on voit que le poids qui est du côté le plus long, est plus petit que l'autre d'un huitiéme de ce poids.

88. Il ne suffit point que les bras soient égaux, il faut de plus qu'ils soient ensemble sur une même ligne droite; s'ils faisoient une courbure qui fût tournée vers le bas, des poids inégaux pourroient faire équilibre avec une telle balance, comme on a observé (27). Il faut encore que le point de supension & les trous des anneaux qui sont aux extrémités des bras, soient sur une même ligne droite, & que les anneaux tournent librement dans leurs trous, & & qu'en pesant ils se mettent d'eux-mêmes dans une situation verticale.

Du Peson.

89. Le peson [*Fig. 33.*] est une espece de balance dont les bras sont inégaux; un même poids peut faire équilibre avec plusieurs, quoiqu'inégaux entr'eux; pour cet effet on met ce poids à différentes distances du point de suspension, on le nomme *masse*, & la balance est appellée *Romaine*: la masse peut parcourir le long bras d'un bout à l'autre; mais la marchandise est à l'extrémité du bras le moins long, toujours à la même distance du point de suspension. Pour connoître l'endroit du long bras où il faut mettre la masse pour qu'elle fasse équilibre avec un poids d'une certaine grandeur, il faut diviser ce bras en différentes parties;

cette division roule sur le principe général que *des poids qui sont entr'eux dans la raison réciproque des distances au point de suspension, ou de l'appui, sont en équilibre* (15). On a exposé dans les *Principes* de quelle maniere on peut s'y prendre pour faire cette division. Dans la romaine il y a deux côtés, l'un qu'on appelle *le foible*, l'autre *le fort*; la méthode de les diviser est la même lorsqu'on pese avec le fort, la marchandise est à une moindre distance de l'appui ou centre du mouvement; ainsi la masse étant à la même distance, peut faire équilibre avec de plus grands poids.

Nous finirons ce quatriéme Livre par le calcul de la force qu'il faut que des hommes fassent pour mouvoir des fardeaux sur le plan incliné à force de bras, & à l'aide du Treuil. Nous prendrons d'abord l'exemple d'hommes qui tirent d'une cave une piéce de vin.

PROBLÊME.

90. *Trouver la force que deux hommes font pour rouler la piéce* K [Fig. 34.] *sur le plan incliné* SH.

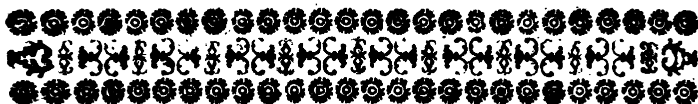
1°. On suppose que le tonneau contient 215 pintes de vin, qui pesent environ 412 livres, le pouce cube pesant 5 gros, & la pinte contenant $49\frac{1}{3}$ pouces cubiques; le tonneau vuide étant supposé peser 60 livres, le tout pesera 472 liv. Pour rendre le calcul plus simple, nous supposerons que la hauteur OS est égale à la moitié de la longueur SH, & que la direction KP est parallele au plan incliné. Cela étant, la force qui tire suivant KP doit être égale à la moitié du poids de la piéce K, c'est-à-dire, égale à 236 livres (46); mais il faut déterminer comment est-ce que deux hommes étant debout, & tirant à force de bras, peuvent résister à cet effort, ou même le surmonter; car un homme qui tire ou pousse horizontalement, a bien de la peine à vaincre une résistance de 60 livres. Nous remarquerons que les hommes qui endurent ce travail, se panchent considérablement en arriere, en sorte que le centre de gravité cesse de passer par les pieds; supposons que le point P soit le centre de gravité de l'un de ces hommes, & que SP repré-

sente la situation qu'il a en faisant monter le corps K, il est évident que la partie de son corps représentée par SP, est un levier dont l'appui est au point S qu'il presse avec ses pieds, & que les directions PA, PD, du centre de gravité P, & de l'effort du poids K suivant la longueur du plan, concourent au même point P du levier; c'est pourquoi si de l'appui S on abbaisse SA, SD perpendiculaires aux directions, & que les pesanteurs des deux hommes ensemble soient à l'effort suivant PK, qui est égal à 236 livres comme SD est à SA, il y aura équilibre: or un homme d'une taille ordinaire pese environ 140 livres, & deux hommes ensemble pesent 280 livres, c'est pourquoi si les perpendiculaires SD, SA sont entr'elles comme 280 sont à 236, il y aura équilibre entre le poids K & les deux hommes (15).

91. D'où l'on voit que dans l'hypothèse présente ces deux hommes font équilibre avec le poids K, non point tant par la force des muscles, que par leur pesanteur: il est aussi évident que plus ils se pancheront en arriere, plus ils auront de force pour résister au poids K.

92. 2°. Si l'on conçoit que le point P est le centre du mouvement d'un treuil au rouleau duquel la corde PK s'entortille, si la force de l'homme qui est appliquée au treuil est à 236 livres effort du corps K suivant SH, comme le rayon du rouleau est au rayon de la roue, il y aura équilibre: si le rayon du rouleau est le quart de celui de la roue, il suffira que l'homme qui meut le corps K sur le plan SH, fasse un effort de 59 livres pour faire équilibre avec la piece de vin pesant 472 livres. L'on voit donc qu'il est aisé à un seul homme de charger cette piece de vin sur une charrette à l'aide d'un treuil.





LIVRE CINQUIEME.

De l'Hydrostatique.

1. L'Hydrostatique est la science qui considere les pressions des fluides pesans lorsqu'ils sont en repos, & qui en détermine les rapports. Dans ces derniers tems on a découvert que l'air que l'on croyoit léger est pesant, puisqu'il a une tendance vers le centre de la terre de même que les corps grossiers ; de sorte qu'il presse non-seulement par son ressort, mais encore par son poids ; & l'on a nommé *Aërometrie* cette partie qui traite de l'air pesant & élastique. Les phénomenes observés jusqu'à présent portent à croire que la plûpart des effets que les fluides produisent par la pression, ont pour cause la pesanteur & l'élasticité : c'est aussi à ces deux considérations que nous rapporterons la plus grande partie de ce que nous avons à dire de l'action des fluides dans l'équilibre. Ce Livre contiendra trois Chapitres : le premier traitera de l'équilibre des liqueurs entr'elles ; le second de l'équilibre des liquides avec les solides ; le troisiéme de l'équilibre des fluides élastiques.

CHAPITRE I.

De l'équilibre des liqueurs entr'elles.

2. Il y a des auteurs qui distinguent entre *fluide* & *liquide* ou *liqueur* ; ils appellent *liqueur* tout corps dont la surface s'étend & se met de niveau, comme l'huile, l'eau, le vin, &c. mais l'air, la flamme, &c. sont simplement fluides & non liquides, parce que leur surface n'est pas de ni-

7. Voici une autre preuve tirée du principe de M. Descartes. Supposons que le poids P surmonte le poids *p*, il est nécessaire que le poids P en descendant pousse hors du vaisseau par l'ouverture *c* un cylindre de liqueur égal à la quantité dont il s'enfonce, & que cette liqueur en sortant éleve le poids *p*; voilà donc deux cylindres égaux, la liqueur qui sort par l'ouverture *c* & la partie enfoncée du poids P, donc les bases sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs (42. *Géom.*) : or les bases sont les ouvertures, de plus les poids sont dans la raison des ouvertures ; donc les poids P, *p* sont entr'eux réciproquement comme les hauteurs de ces mêmes cylindres (14. *Arith.*) ; mais ces hauteurs sont les espaces, sçavoir, que le poids P parcourroit suivant sa direction, & le poids *p* contre la sienne ; donc ils sont en équilibre. (*Liv. IV.* 8.)

8. 2°. *Les parois du vaisseau supportent des pressions proportionnelles à leur grandeur* ; une surface triple est pressée trois fois davantage. Car la pression totale de cette surface est proportionnelle au nombre des molecules qui la touchent, puisque toutes les molecules sont également pressées : or une surface triple est touchée par un nombre de molecules trois fois plus grand ; donc la pression qu'elle supporte est de même trois fois plus grande.

9. 3°. *Un seul poids* P *ou* p *presse le fluide avec autant de force que les deux ensemble* ; c'est-à-dire, que si on ôte le poids P en fermant l'ouverture C, la liqueur sera foulée par le poids *p* qui presse à l'ouverture *c* avec autant de force que par les deux poids ensemble. Car puisque l'ouverture *c* demeure la même, les molecules qui y répondent sont pressées avec la même force : de plus cette pression se transmet & se communique également à toutes les parties du fluide, ensorte que la pression totale est proportionnelle à leur nombre (8, 6.) ; donc la pression en *c* qui se fait du haut vers le bas est à celle qui se fait en C de bas en haut comme l'ouverture *c* est à l'ouverture C : or la pression en *c* est supposée la même ; donc la pression en C est aussi la même que si les deux poids pressoient ensemble par ces ouvertures.

10. D'où l'on voit que si l'ouverture augmente ou diminue dans la raison des poids qui pressent, la liqueur en reçoit toujours la même pression; en effet si le poids devenant trois fois plus grand, l'ouverture est triple de ce qu'elle étoit, la pression totale du poids est à la vérité trois fois plus grande, mais parce qu'elle se distribue immédiatement à un nombre de molecules trois fois plus grand, il s'ensuit que chacune n'en est pas pour cela plus pressée. Mais si le poids augmentoit ou diminuoit, l'ouverture demeurant la même, la pression augmenteroit ou diminueroit à proportion de l'augmentation ou de la diminution qu'il recevroit.

De la pression des fluides pesans, ou de l'équilibre des liqueurs.

11. Les liqueurs sont de même ou de différentes pesanteurs spécifiques. Dans ce qui vient d'être dit au commencement de ce Chapitre nous avons consideré les liqueurs sans pesanteur; mais dans la suite nous considererons la pression qu'elles reçoivent ou qu'elles causent, comme étant l'effet de leur pesanteur propre.

De la pression & de l'équilibre des liqueurs de même pesanteur spécifique.

12. On dit qu'une liqueur est de *niveau* ou *à niveau* lorsque sa surface supérieure est horizontale, & qu'elle imite la courbure de la terre; on dit aussi qu'une surface plane est de niveau, lorsqu'elle touche la surface de la terre: si elle a une petite étendue, on la regarde comme se confondant avec la surface convexe, de même qu'on regarde une petite portion de la surface de la terre comme une surface plane; pour lors tous les points de cette petite surface plane sont censés être dans le niveau *vrai*; mais si la surface plane qui touche la terre est d'une étendue considérable, on dit que ses points sont dans le niveau *appa-*

rent, & la distance qu'il y a de l'un de ces points à la surface de la terre, est appellée la différence du niveau apparent au-dessus du vrai.

PROPOSITION I.

13. *Une liqueur qui est laissée à elle-même 1°. est de niveau, 2°. elle est en repos, & ses parties en équilibre.*

1°. Si la liqueur étoit inégalement élevée à sa surface, il y auroit des colomnes plus hautes les unes que les autres : or les pressions que les plus hautes produiroient de bas en haut étant égales à leurs poids, seroient plus grandes que les résistances des colomnes moins hautes; donc celles-ci seroient surmontées, & les plus hautes descendroient: les inégalités que l'on voudroit supposer se trouver à la surface d'une liqueur ne peuvent donc s'y conserver, elle est donc de niveau.

14. On peut ajouter à ceci que les particules qui composeroient ces éminences, n'étant point soutenues, descendroient comme sur des plans inclinés.

15. 2°. La liqueur est en repos, & ses parties sont en équilibre. Concevons que la liqueur du vaisseau [*Fig.* 36. 37. 38.] est divisée en couches horizontales, nous verrons dans la Proposition suivante que chacune d'elles est chargée de même que si elle avoit par-dessus une colomne de cette liqueur qui auroit pour base la couche, & pour hauteur la distance de la couche au niveau ; par conséquent chaque molecule de la couche est pressée de même que si elle étoit chargée d'un filet de cette colomne ; donc toutes les molecules sont également chargées du haut vers le bas : or le filet qui charge une molecule la presse également en tout sens avec un effort égal à son poids ; donc toutes les molecules de la couche se poussent & se repoussent également en sens contraires suivant toutes les directions possibles, aucune d'elles ne peut donc prévaloir ; ainsi elles sont en équilibre.

Il suit de la I. Partie que s'il y a de la liqueur sur un plan horizontal, elle coulera de tous côtés vers le point où ce

plan touche la surface de la terre, car les extrémités du plan étant plus hautes ou plus éloignées de la surface de la terre que le point d'attouchement, la liqueur descendra vers le point d'attouchement pour se mettre dans le niveau vrai.

PROPOSITION II.

16. *Si un vaisseau est rempli d'une même liqueur, la charge du fond ou de la base, est égale au poids d'une colomne de cette liqueur, qui auroit pour base le fond du vaisseau, & pour hauteur sa distance au niveau, quelle que soit la figure du vaisseau.* [Fig. 36. 37. 38.]

On énonce cette Proposition en d'autres termes. *Les liqueurs pesent sur les fonds des vaisseaux selon la proportion des hauteurs en ayant néanmoins égard aux bases*, ensorte que si les hauteurs & les bases sont égales, les pressions sont égales.

I. Démonstration. Concevons que la liqueur est divisée en tranches horizontales & infiniment minces. Il est certain que chaque tranche est un poids qui charge les couches inférieures, & par conséquent le fond.

Or 1°. si le vaisseau est droit & de même grosseur par tout [*Fig.* 36], il est certain que la charge du fond est égale au poids de la colomne qui est dessus, car cette colomne le charge par tout son poids. 2°. Si le vaisseau est incliné, ou bien s'il va en s'élargissant ou en s'etrécissant [*Fig.* 37. 38], il faut concevoir qu'il a autant d'ouvertures différentes qu'il y a de couches: or toutes ces couches ou tranches ont la même épaisseur; donc elles sont entr'elles comme les bases (42. *Géom.*), c'est-à-dire, comme les ouvertures par où elles pressent la liqueur qui est au-dessous; les poids de ces tranches produisent donc des pressions proportionnelles aux surfaces pressées, en sorte que si ces surfaces sont égales les pressions causées sont égales (8. 10); donc toutes les tranches pesant sur le fond y produisent des pressions égales, & par conséquent égales au poids de la tranche qui le touche; la pression du fond ou sa charge est donc égale au produit du poids de cette tranche par le nombre de cel-

les qui pressent, & par conséquent égale au poids d'une colomne de la liqueur qui auroit pour base le fond, & pour hauteur la distance au niveau.

Voici la même preuve présentée un peu autrement. 1°. Dans la *Fig*. 38, il n'y a que la colomne ABCD qui charge le fond BC, car la liqueur qui est dans l'espace ABE, DCF est soutenue en partie par la résistance des parois du vaisseau, & en partie par la colomne ABCD : il n'y a donc que cette colomne qui charge le fond BC. 2°. Dans la *Fig*. 37, la liqueur contenue dans l'espace AEB, DCF est pressée par le poids de la colomne ABCD, en sorte que les pressions qu'elle supporte à égales profondeurs sont entr'elles comme les surfaces pressées (8. 10) : or pareillement cette liqueur résiste à la colomme ABC, & la repousse à l'aide des parois & du fond du vaisseau avec la même force ; donc la pression qu'elle produit sur les parties EB, CF du fond EF sont proportionnelles à ces parties, & par conséquent égales aux poids des colomnes qui auroient EB, CF pour bases & pour hauteur AB ou DC ; donc la pression totale du fond est égale au poids d'une colomne qui auroit pour base le fond EF & pour hauteur la distance de ce fond au niveau.

17. On pourroit penser que comme les liqueurs pressent également en tout sens, les colomnes obliques au fond devroient presser plus fortement que les colomnes perpendiculaires, puisque celles-ci sont moins pesantes que celles là, lesquelles sont plus longues. Il est vrai que les colomnes obliques étant supposées de même grosseur que les perpendiculaires, sont plus pesantes, mais elles ne pressent pas pour cela avec plus de force que les perpendiculaires, car les colomnes obliques sont dans les vaisseaux qui les contiennent comme sur des plans inclinés, & les fonds sont comme des puissances qui retiennent la liqueur sur ces plans, & l'empêchent de couler : or lorsqu'un corps est retenu sur un plan incliné suivant une direction parallele au plan, la pesanteur est à la force qui le retient ou à la pression qu'il exerce suivant la longueur, comme cette longueur est à la

hauteur (*Liv. IV.* 46.); la hauteur du plan ou la distance du fond au niveau représente donc la pression causée par la colomne oblique.

18. *Corollaires.* 1°. Il paroît par tout ce qui vient d'être dit que dans toutes sortes de vaisseaux quelle qu'en soit la figure, droits, inclinés ou courbés en différens sens, la charge du fond est égale au poids d'une colomne de la liqueur qui auroit pour base le fond du vaisseau, & pour hauteur la perpendiculaire abbaissée du niveau à la base.

19. 2°. Si le vaisseau est de figure prismatique, la charge du fond est égale au poids de la liqueur contenue; si le vaisseau va en s'élargissant vers le fond, cette charge est plus grande; s'il va en s'étrécissant, elle est moindre que la liqueur contenue.

20. 3°. Si deux vaisseaux ont des hauteurs & des bases égales, les charges ou pressions dont il s'agit sont égales. Si les hauteurs & les bases sont inégales, les charges ou pressions sont entr'elles comme les produits des bases & des hauteurs; car les colomnes de liqueur qui les représentent, sont elles-mêmes égales à ces produits (16). Si les bases des vaisseaux sont égales, & les hauteurs inégales, les charges sont entr'elles comme les hauteurs; & si les hauteurs sont égales & les bases inégales, les pressions ou charges sont entr'elles comme ces bases inégales.

21. *Remarque.* La Proposition & ses Corollaires font appercevoir qu'avec une très-petite quantité de liqueur on peut produire une grande force. Si l'on a un vaisseau qui ait un pied quarré de base & un pouce de haut, il contiendra la douziéme partie d'un pied cube d'eau, ou 144 pouces cubes: le pied cube d'eau pese environ 72 livres, ainsi la liqueur contenue ne pese que 6 liv. or si on ajuste au vaisseau un tuyau de 10 pieds de long & d'un pouce quarré d'ouverture, il contiendra 120 pouces cubes d'eau qui ne pesent pas tout à fait 6 livres; ainsi toute la liqueur pese moins de 12 livres; mais la pression qu'elle exerce sur le fond est égale au poids d'une colomne d'eau qui auroit un pied quarré de base, & 10 pieds de haut, laquelle pese 720 livres;

produit de 72 par 10. Si on en veut faire l'expérience, il faut que le fond du vaisseau soit mobile, de maniere qu'il puisse monter & descendre, sans néanmoins que la liqueur se répande : or si l'on se sert d'une balance pour soutenir le fond que l'on suppose suspendu à l'un des bras, il faudra pour faire équilibre avec la pression de l'eau, appliquer à l'autre bras de la balance un poids de 720 livres ; de sorte que si le vaisseau est fixement attaché à un mur, une main d'homme qui soutiendroit le fond mobile sentiroit un poids de 720 livres, & si d'une main il tenoit le vaisseau, & de l'autre le fond mobile, elles sentiroient l'une & l'autre un poids de 720 livres; mais si le fond tient au vaisseau, elles ne soutiendront plus qu'un poids d'environ 12 livres, c'est-à-dire, le poids absolu de la liqueur contenue. Car ce qui fait que chaque main porte une pression de 720 livres, c'est que l'eau qui est dans le tuyau de 10 pieds, presse l'eau du vaisseau de maniere que chaque pouce de cette liqueur est chargé comme d'une colomne de 10 pieds ou de 120 pouces (8. 10. 16.) ; & parce qu'à cause de la fluidité la pression se communique également en tout sens (3), il s'ensuit que le fond supérieur & le fond inférieur sont poussés en sens contraires avec des efforts égaux au poids de 10 pieds cubes d'eau ou de 720 livres ; c'est pourquoi les mains qui répriment, selon l'hypothèse ces efforts, doivent en faire de tous contraires qui tendent à rapprocher les deux fonds ; ainsi chaque main doit éprouver une résistance ou une pression de 720 livres : mais si les deux fonds tiennent fermement l'un à l'autre, les efforts qui tendent à les écarter sont détruits par là ; ainsi ils ne se font point sentir : c'est pourquoi la main n'éprouve que le poids absolu de la liqueur, lequel n'ayant qu'une tendance qui est vers le centre de la terre, ne peut être tenu en équilibre que par une force externe.

22. Lorsqu'une surface est horizontale, elle est également pressée dans toutes ses parties par la liqueur qui est dessus ; mais si elle est verticale ou inclinée, la pression n'est pas la même par tout ; les parties qui sont à une plus grande profondeur

profondeur sont plus chargées, puisqu'elles répondent à des colomnes plus hautes (20); il n'y a que celles qui sont à égales distances du niveau qui portent des pressions égales : pour avoir la charge d'une telle surface, il faut concevoir qu'elle est divisée par une infinité de plans paralleles entr'eux & à l'horizon; tous ces plans étant supposés également éloignés les uns des autres, diviseront la hauteur en parties égales, & la surface en ses élémens d'une hauteur indéfiniment petite : les hauteurs augmenteront donc en allant du niveau vers le bas du vaisseau, comme les nombres 1,2,3,4, &c. c'est-à-dire, en progression arithmétique, ou dont les termes se surpassent également; de sorte que la surface étant rectangulaire, ses élémens seront égaux entr'eux, ainsi leurs charges ou pressions seront entr'elles comme les hauteurs (20) ou leurs distances au niveau, & par conséquent en progression arithmétique; donc pour avoir la somme de toutes ces pressions partielles qui composent la pression totale, il s'agit de trouver la somme d'une progression arithmétique dont le premier terme est la pression qui se fait au niveau, & le dernier la pression qui se fait sur le dernier élément de la surface : or la pression que la liqueur exerce sur le premier élément lequel est au niveau est nulle; ainsi la progression commence à zero, & le dernier terme est la plus grande de toutes les pressions partielles, elle est représentée par la profondeur à laquelle le dernier élément de la surface se trouve.

PROBLÊME I.

23. *Trouver la poussée de l'eau contre une des faces d'un réservoir représentée par le rectangle* ABCD. [Fig. 39.] On suppose que l'eau est à la profondeur de 10 pieds, & que la face proposée a 20 pieds de largeur. 1°. Il faut concevoir que la surface est divisée en ses élémens tels que ABEF perpendiculaires à la largeur AD, & chercher la pression de l'un de ces élémens : or l'élément ABEF étant composé des parties infiniment petites des élémens tels que BGIC dans lesquels la surface est conçue divisée par les

plans horizontaux dont on a parlé; la pression de l'élément ABEF est représentée par la somme d'une progression arithmétique dont le premier terme est zero, & le dernier 10; donc 50 produit de la somme des extrêmes 10 & 0 par 5 moitié du nombre des termes de la progression, est la pression de l'élement ABEF (25. *Arith.*): 2°. il faut multiplier 50 par la largeur AD, & le produit 1000 sera la charge de la surface ABCD, exprimée en pieds cubes d'eau: 3°. si on multiplie ce produit par 72, le nouveau produit 72000 sera la charge en livres de la surface ABCD.

Si la surface ABCD étoit inclinée ou oblique à l'horison, la profondeur du réservoir étant encore supposée de 10 pieds, la hauteur AB de la surface auroit plus de 10 pieds; supposons qu'elle en a 12: pour avoir la pression de l'élément ABEF, il faut multiplier la somme 10 des extrêmes de la progression par 6 moitié du nombre des termes de la même progression: car il est visible que la profondeur étant la même, le nombre des termes de la progression, ou le nombre des élemens de la surface ABCD augmente en même raison que sa hauteur AB.

24. Si on vouloit connoître l'endroit de cette surface qui est le plus fatigué & qui est comme le centre de toutes les pressions, il faudroit trouver le centre de gravité d'u triangle BCH qui a pour base la largeur BC de la surface & dont le sommet est au point H milieu de la largeur AD. Car comme les pressions des élémens tels que BGIC faits par les plans horizontaux augmentent depuis le niveau jusqu'à la base ou fond du réservoir en progression arithmétique, la pression de l'élément BGIC étant représentée par la base BC du triangle BCH, les pressions des autres élémens seront représentées par les paralleles du triangle répondantes à ces élémens; donc la somme des pressions sera représentée par la somme des paralleles qui remplissent le triangle; c'est pourquoi le centre de gravité du triangle sera le centre des pressions, & fera connoître quel est l'endroit de cette surface qui est le plus fatigué. *Voyez dans les principes la maniere de trouver le centre de gravité d'un triangle.*

De l'équilibre des liqueurs dans des tuyaux recourbés ou qui communiquent.

25. L'expérience montre que si on verse d'une liqueur dans un tuyau recourbé, elle se met de niveau dans les deux branches quoiqu'inégalement grosses; ainsi une petite quantité de liqueur fait équilibre avec une fort grande.

PROPOSITION III.

26. *Si une liqueur est de niveau ou à la même hauteur dans les deux branches d'un tuyau recourbé, elle est en équilibre.* [Fig. 40.]

I. Démonstration. Il faut concevoir à l'endroit le plus bas du tuyau une tranche de liqueur RS verticale ou perpendiculaire à l'horizon; cette branche étant considerée comme un fond mobile, & les deux branches du tuyau comme deux vaisseaux, ils auront un même fond mobile qui est cette tranche: or ce fond est également pressé de part & d'autre, car les colomnes de liqueur contenues dans les deux branches DK, CF produisent des pressions qui sont égales aux produits de la base commune RS & des hauteurs égales DK, CF (16. 20); donc le fond mobile RS est également poussé de part & d'autre; donc la liqueur est en équilibre dans les deux branches.

II. Démonstration. Que la grosse colomne surmonte, s'il est possible, la moindre, & ne considerons leurs mouvemens qu'au premier instant auquel elles parcourent les espaces très-petits AM, NO. Puisque la liqueur qui sort de la branche FC entre dans la branche DK, le petit cylindre AB est égal au petit cylindre EO; donc les bases de ces cylindres sont entr'elles réciproquement comme les hauteurs AM, NO (42. *Géom.*): or les colomnes CA, DN ayant même hauteur, sont entr'elles comme leurs bases, c'est-à-dire, comme les bases des petits cylindres AB, EO (42. *Géom.*); donc ces colomnes sont aussi entr'elles réciproquement comme les espaces AM, NO, sçavoir, que la colomne AC parcourroit suivant sa direction, & la colom-

ne DN contre la sienne ; donc elles sont en équilibre. (*Liv. IV.* 8)

27. Si la branche DN est conique, on en pourra supposer une cylindrique moindre que la conique, & l'on fera voir qu'elle ne peut être surmontée par la colomne AC; donc la colomne conique qui est plus pesante ne sera point non plus surmontée par la grosse colomne AC. Si on prétend au contraire que la colomne conique doit l'emporter, on pourra supposer à sa place une colomne cylindrique qui soit plus grosse, elle ne l'emportera point sur l'autre colomne cylindrique ; donc la colomne conique qui est moindre ne l'emportera pas non plus sur la colomne cylindrique.

28. *Remarque.* Si l'une des branches est capillaire, c'est-à-dire, d'un très-petit diametre, l'eau s'y tient au-dessus du niveau de la grosse, mais si c'est du mercure, il s'y tient au-dessous du niveau de la grande. On a rapporté dans les principes l'explication de M. Carré, ensemble les expériences de M. Petit qui la combattent. Voyez l'histoire & les Mémoires de l'année 1724, & dans l'histoire de la même année la pensée de M. de Mairan sur le même sujet : dans le systême de ceux qui expliquent tous les mouvemens par l'impulsion, elle a toute la vraisemblance possible.

De l'équilibre des liqueurs de différentes pesanteurs spécifiques.

29. Lorsque deux liqueurs en pareil volume pesent inégalement, pour qu'elles soient en équilibre, il est nécessaire qu'elles y occupent des hauteurs différentes.

PROPOSITION IV.

30. *Si deux liqueurs occupent dans un tuyau recourbé des hauteurs qui soient entr'elles réciproquement comme les pesanteurs spécifiques, elles sont en équilibre.* [Fig. 41.]

Supposons 1°. que les branches CF, DK sont d'égale grosseur, & que l'espace qui est au-dessous de l'horizontale LH est occupé par la liqueur qui remplit la branche CF, & que NH est l'espace que l'autre liqueur occupe dans la

branche DK : il eſt évident que la liqueur LCDH eſt en équilibre avec elle-même, puiſqu'elle eſt à égale hauteur dans les deux branches, il reſte donc que les colomnes AM, NH ſoient en équilibre. On ſuppoſe d'abord que les baſes des colomnes AM, NH ſont égales, donc leurs volumes ſont comme les hauteurs (42.*Géom.*) ; de plus les peſanteurs ſpécifiques des liqueurs ſont (*hypo.*) réciproquement comme les hauteurs ; donc ces mêmes peſanteurs ſont entr'elles réciproquement comme les volumes ; donc les colomnes AM,NH peſent également (*Liv. II.* 25.) ; donc elles ſont en équilibre.

2°. Si la branche DK eſt plus petite que la branche CF, les peſanteurs abſolues des colomnes AM, NH ſeront entr'elles comme les baſes, car nous venons de voir que ſi les baſes étoient égales, les poids des colomnes AM, NH ſeroient auſſi égaux; d'où ſuit il que ſi la baſe de la colomne NH diminue, ſa peſanteur diminue auſſi dans la même raiſon; ſi la baſe eſt deux fois moindre, cette colomne peſe deux fois moins; donc dans l'hypothèſe preſente les peſanteur abſolues des colomnes AM, NH ſont dans la raiſon des baſes, ou dans la raiſon des ouvertures par où ces colomnes preſſent la liqueur qui eſt deſſous ; donc ces colomnes ſont en équilibre (6).

31. On peut encore démontrer cette propoſition par le principe de M. Deſcartes en faiſant voir que ſi l'une des colomnes ſurmontoit l'autre, l'eſpace que l'une parcourroit ſuivant ſa direction, & celui que l'autre parcourroit contre la ſienne, ſont entr'eux réciproquement comme les peſanteurs, ce qui ne peut arriver (*Liv. IV.* 8.) ; par conſéquent les colomnes ſont en équilibre.

PROBLÊME II.

32. *Trouver les peſanteurs ſpécifiques de deux liqueurs.* [Fig. 41.]

Premier Cas. Lorſque les liqueurs ne ſe mêlent point, comme l'eau & l'huile. Verſez dans le tuyau recourbé FCDK l'une des liqueurs, par exemple, la plus peſante,

jusqu'à ce qu'elle remplisse environ la moitié du tuyau, ou même davantage; versez ensuite l'autre liqueur jusqu'à ce que le tuyau soit à peu près plein; mettez-le dans une situation verticale, de maniere que les branches CF, DK soient perpendiculaires à l'horizon; par l'extrémité inférieure L de la liqueur qui occupe un moindre espace dans le tuyau, tirez la ligne horizontale LH, prenez avec un compas les hauteurs LA, HN, portez les sur une échelle divisée en parties égales très-petites, & les pesanteurs spécifiques seront entr'elles réciproquement comme les nombres des parties que les hauteurs LA, HN contiendront.

Second Cas. Lorsque les liqueurs se mêlent, comme l'eau & le vin. Il faut d'abord verser du vif argent qui est la liqueur la plus pesante, ensuite les deux liqueurs l'une par l'ouverture F, l'autre par l'ouverture K, jusqu'à ce que le vif-argent touche dans les deux branches à la ligne de niveau LH; prenez ensuite les hauteurs LA, HN, & faites comme dans le premier Cas.

De la pesanteur de l'air en particulier.

33. On a cru durant plusieurs siecles que l'air étoit leger, ce n'est que dans ces derniers tems qu'on a découvert qu'il est pesant. Un certain jardinier de Florence s'apperçut le premier que l'eau ne montoit par aspiration dans les pompes qu'à la hauteur de 18 coudées: surpris de ce phenomene, il le communiqua à Galilée qui jugea que l'air ne pouvoit faire équilibre par son poids qu'avec 18 coudées d'eau. Dès-lors l'opinion dominante perdit beaucoup de son crédit; cependant les Philosophes s'étant assurés de la vérité du fait, firent diverses expériences sur la pesanteur de l'air, afin de se mettre en état de dissiper les doutes, & d'éclaircir les difficultés: nous allons rapporter les plus célebres qui furent faites alors & dans la suite.

34. Galilée commença. Il introduisit avec une seringue une grande quantité d'air dans un balon ou bouteille ronde de verre; & après avoir réduit par la compression un gros volume d'air à occuper un petit espace, il boucha la bou-

teille avec un robinet, la mit dans une balance pour la pe-ſer, & il trouva que dans cet état elle péſoit davantage qu'auparavant. Mrs Volſius & Nieuventit ont réïteré dans la ſuite l'expérience de Galilée avec le même ſuccès.

35. Toricelli diſciple de Galilée remplit avec du vif argent un tuyau de verre [*Fig.* 42.] qui n'étoit ouvert que par un bout, afin d'ôter toute communication de l'air avec le dedans du tuyau; il mit enſuite tremper le bout ouvert dans du vif argent qu'il avoit préparé dans un vaſe, & tenant le tuyau dans une ſituation verticale, le vif argent dont il l'avoit rempli deſcendit en partie dans le vaſe, & le reſte demeura ſuſpendu.

36. M. Paſcal fit auſſi une expérience ſemblable. Il remplit le tuyau recourbé ABCD [*Fig.* 43.] de vif argent, & mit tremper le bout ouvert dans d'autre vif-argent qu'il avoit préparé dans un vaiſſeau, pour lors le vif-argent qui étoit dans la branche AB deſcendit en partie dans le tuyau CD, & l'autre partie demeura dans la cavité BC: le tuyau étant dans une ſituation verticale, M Paſcal perça une membrane qui bouchoit un trou qui étoit en C; alors le vif-argent qui étoit deſcendu dans l'eſpece de chambre CB, monta auſſi-tôt au haut du tuyau BA, & celui qui étoit demeuré ſuſpendu dans le tuyau CD tomba avec précipitation dans le vaiſſeau.

37. M. Perrier fit de nouveau vers ce même-tems l'expérience de Toricelli ſur la montagne du Puy de Domme en Auvergne, elle eſt élevée au deſſus des Minimes de la ville de Clermont de 500 toiſes; (mais ſuivant la détermination Géométrique de M. Caſſini de Thuri, le 6 Août 1739, cette hauteur eſt de 560 toiſes) le vif-argent qui dans le jardin des Minimes ſe ſoutenoit à la hauteur de 26 pouces 3 ligne $\frac{1}{2}$, deſcendit de 3 pouces 1 $\frac{1}{2}$ ligne, & il ne s'en trouva au haut de la montagne que vingt-trois pouces deux lignes. MM. Caſſini & Le Monier Docteur en Medecine tous deux de *l'Accadémie Royale des Sciences* vérifierent le même jour 6 Aout 1739, l'expérience de M. Perrier, & ils trouverent qu'aux Minimes le vif-argent étoit

à la hauteur de 27 pouces $\frac{1}{2}$ ligne, & au Puy de Domme à 23 pouces 9 lignes $\frac{1}{2}$. Nous remarquerons bien-tôt la grande exactitude de M. Perrier, par la parfaite conformité qu'il y a entre son expérience, & celle de MM. Cassini & Le Monier.

PROPOSITION V.

38. *L'air est pesant.*

Selon l'expérience de Galilée, une bouteille qui contient une plus grande quantité d'air pese davantage que la même bouteille lorsqu'elle en contient une moindre. Cela posé, on est assuré qu'un corps est pesant lorsqu'étant joint à un autre corps pesant, ils composent ensemble un tout plus pesant; or un air fortement condensé compose avec la bouteille qui le contient, un tout qui est plus pesant que la bouteille vuide de cet air; donc, &c.

39. Les expériences de Toricelli, de MM. Perrier & Pascal prouvent aussi incontestablement la même vérité. Concevons que dans l'expérience de Toricelli, les côtés du vase sont prolongés jusqu'au plus haut de l'atmosphere, ou de la masse de l'air, le vif-argent demeurera encore suspendu à la même hauteur dans le tuyau. Cela posé, c'est la colomne d'air qui rempliroit la capacité du vaisseau qui fait monter le vif-argent dans le tuyau, puisque selon l'expérience du Puy de Domme, si cette colomne diminue en hauteur, le vif-argent descend dans le tuyau; si au contraire elle devient plus haute, le vif-argent monte: or dans cette hypothèse la colomne d'air & le vif-argent du tuyau font équilibre; de plus l'action de l'air est dirigée du haut vers le bas; donc l'air par sa direction naturelle tend à descendre; donc il est pesant.

40. *Coroll.* 1°. L'air doit de lui-même se mettre de niveau au haut de l'atmosphere, comme les liqueurs dans les vaisseaux, ou l'eau de la mer.

2°. L'air environne la Terre, car par sa pesanteur il doit se répandre tout autour du globe terrestre, puisque c'est par ce mouvement qu'il tend à s'approcher du centre.

41. 3°. Il y a la même quantité d'air au-dessus de tous

les endroits de la mer, car tous les endroits de la mer ſont de niveau ou également élevés; de même l'air eſt de niveau au haut de l'atmoſphere; donc il y a la même quantité d'air au-deſſus de tous les endroits de la mer : donc le vif-argent doit être à la même hauteur dans le tuyau de Toricelli dans tous les endroits de la mer.

42. 4°. Si on diviſe par la penſée l'atmoſphere, c'eſt-à-dire, la maſſe d'air qui l'environne, en couches concentriques, les parties d'une même couche ſont également preſſées, puiſqu'elles ont toutes la même quantité d'air au-deſſus : donc les endroits de la terre qui ſont dans une même couche concentrique, ſont également preſſées par le poids de l'air, ceux qui ſont dans des couches plus élevées ſont moins chargés, & ceux qui ſont dans des couches moins élevées le ſont davantage; c'eſt pourquoi le vif-argent doit monter à la même hauteur dans les endroits qui ſont également élevés, il doit ſe tenir plus bas dans les endroits plus élevés, & être plus haut dans le tuyau aux endroits qui ſont plus bas.

43. Si l'air ne ſe comprimoit point, s'il étoit par-tout également denſe, on pourroit connoître ſa hauteur par le moyen de l'expérience du Puy de Domme en faiſant une ſeule regle de proportion; on pourroit auſſi déterminer ſa peſanteur ſpécifique; mais parce que l'air ſe dilate par ſon reſſort à meſure qu'étant moins chargé il approche davantage du haut de l'atmoſphere, ſes véritables limites nous ſont inconnues, & on ne ſçauroit déterminer en général ſa peſanteur ſpécifique: d'ailleurs l'air ne peſe pas toujours également dans un même lieu; on ne peut donc point avoir des déterminations bien préciſes de cette peſanteur pour aucun lieu.

44. Pour meſurer les changemens qui arrivent au poids de l'air, on obſerve la plus grande & la moindre hauteur du vif-argent dans le tuyau de Toricelli. Suppoſons que la plus grande ſoit de 28 pouces, & la moindre de 26 pour un même lieu; ſi l'on diviſe la différence qui eſt de deux pouces en 24 parties égales, qu'on applique cette échelle

au haut du tuyau de maniere que la premiere division réponde au haut du 28e pouce, on aura un instrument gradué qui indiquera les différentes pressions de l'air sur le vif-argent. Le tuyau de Toricelli ainsi gradué est appellé *Barometre*; il y a seulement cette différence, que dans le barometre le vase ou le récipient du vif-argent est une bouteille qui fait un même corps avec le tuyau, qui pour cet effet est recourbé à son extrémité inférieure, afin que l'ouverture de la bouteille soit tournée vers le haut.

45. Lorsque la pesanteur de l'air varie, les variations sont proportionnelles aux pesanteurs ou pressions avant qu'elles fussent augmentées ou diminuées. Supposons que de l'eau devienne plus pesante d'un dixiéme, si auparavant cette augmentation elle faisoit équilibre dans l'endroit le plus bas avec 20 pouces de mercure, dans le milieu de sa hauteur elle ne faisoit équilibre qu'avec dix pouces, puisque le mercure étant déchargé de la moitié du poids de l'eau, l'eau devoit aussi être déchargée dans l'équilibre de la moitié du poids du mercure; mais après l'augmentation de pesanteur, l'eau soutient dans l'endroit le plus bas 22 pouces de mercure, & au milieu de sa hauteur elle en soutient 11 : ainsi les variations arrivées à la pesanteur de l'eau à l'endroit le plus bas, & au milieu de sa hauteur, sont 2 & 1 : or ces nombres sont entr'eux comme les pesanteurs ou pressions de l'eau 20 & 10 avant qu'elles fussent augmentées : lors donc que la pesanteur de l'air varie dans deux endroits inégalement élevés, par exemple, au Jardin des Minimes de la ville de Clermont, & au Puy de Domme, les variations doivent être proportionnelles aux pressions antérieures; & si on trouve qu'elles leur sont proportionnelles, on en peut conclure que les observations précédentes ont été faites avec tout le soin & la précision possibles : or selon l'expérience de M. Perrier, le vif-argent dans le Jardin des Minimes se soutenoit à la hauteur de 26 pouces 3 lig. $\frac{1}{2}$, & au Puy de Domme, il étoit à 23 pouces 2 lignes : selon les observations toutes récentes de MM. Cassini & Le Monier, le vif-argent étoit à la hauteur de 27

pouces $\frac{1}{2}$ lig. & au Puy de Domme à 23 pouces 9 lig. $\frac{1}{2}$; cela étant, si de ces derniers nombres on retranche les précédens, on trouve 9 lignes & 7 lignes $\frac{1}{2}$ pour les différences des pesanteurs survenues à l'air au jardin des Minimes & au Puy de Domme: mais 26 pouces 3 lig. $\frac{1}{2}$ sont très-sensiblement à 23 pouces 2 lignes, comme 9 est à $7\frac{1}{2}$, puisque si l'on ajoute seulement $\frac{1}{2}$ à $7\frac{1}{2}$, pour rendre le second de ces deux rapports un peu moindre que le premier (sans cette addition il est un peu plus grand), on trouve qu'il devient trop petit, puisque le produit des extrêmes est pour lors plus grand que le produit des moyens (13 *Arith.*); d'où l'on voit que l'expérience de M. Perrier est très-conforme aux dernieres observations.

46. On suppose ordinairement que l'air fait équilibre avec 28 pouces de mercure & avec 32 pieds d'eau, parce qu'aux endroits qui ne sont pas considérablement élevés audessus de la mer, comme Paris, le barometre du vif-argent monte à 28 pouces, & celui d'eau à 32 pieds, ce qui est conforme aux observations de M. Mariotte.

Effets de la pesanteur de l'Air.

47. Ces effets sont autant de preuves de sa pesanteur. Les exemples suivans sont tirés du *Traité de la pesanteur de l'Air* de M. Pascal, dont on a copié le discours & les expressions en plusieurs endroits.

48. 1°. *Quand une Seringue trempe dans l'eau, en tirant le piston, l'eau suit & monte comme si elle adhéroit; c'est ainsi que l'eau monte dans une pompe aspirante, qui n'est proprement qu'une longue seringue.* M. Pascal pour rendre raison de cet effet, & de la plûpart de ceux qui sont expliqués dans son Traité, s'applique à montrer la parfaite conformité qu'il y a entre la maniere dont l'air les produit, & celle dont une liqueur pesante les produiroit si elle agissoit dans des circonstances toutes semblables.

Supposons qu'au fond d'une cuve pleine d'eau on a mis un vaisseau où il y a du vif-argent, cette liqueur étant plus pesante que l'eau, demeurera dans le vase: cela fait que

l'on enfonce une ſeringue juſqu'à ce que le bout d'en-bas trempe dans le vif-argent du vaiſſeau, pour lors ſi on ceſſe de pouſſer le piſton contre l'ouverture d'en-bas, le vif-argent ſera contraint d'entrer dans la ſeringue, & de s'élever au-deſſus du niveau du vaſe qui le contient : car l'eau peſe ſur la ſurface du vif-argent, & la preſſe en toutes ſes parties, hormis en celles qui ſont à l'ouverture de la ſeringue ; or la preſſion ſe communique de celles-là à celle-ci, & parce que la réſiſtance eſt moindre dans l'intérieur de la ſeringue, elles y entrent pour contrepeſer le poids de l'eau qui preſſe au-dehors.

De même lorſqu'on trempe le bout d'une pompe ou ſeringue dans l'eau, l'air touche l'eau du vaiſſeau en toutes les parties de ſa ſurface, hormis en celles qui ſont à l'ouverture de la pompe : l'eau cependant n'entre point ſi on laiſſe les choſes en cet état, parce que l'air agit avec autant de force ſur le piſton, que ſur la ſurface de l'eau ; mais ſi on leve le piſton pour vaincre la réſiſtance de l'air qui le touche, pour lors l'eau qui eſt à l'ouverture de la pompe eſt preſſée de toutes parts, hormis du côté de l'intérieur de la pompe, c'eſt pourquoi elle y entre pour contrepeſer par ſon poids l'action de l'air qui peſe au-dehors.

49. 2°. *Suppoſons qu'il y ait deux vaiſſeaux pleins d'eau, l'un plus élevé que l'autre ; ſi l'on remplit auſſi d'eau un ſiphon ou tuyau recourbé dont les branches ſoient inégales, que l'on faſſe tremper la plus courte dans le vaiſſeau plus élevé, l'eau montera dans le ſiphon pour deſcendre par la branche la plus longue dans le vaiſſeau le plus bas où elle trempe.*

Pour expliquer cet effet nous ſuppoſerons d'abord que les deux vaiſſeaux ſont dans une cuve où il y a 15 pieds d'eau, & que les vaiſſeaux, de même que le ſiphon, ſont pleins de vif-argent, avec cette différence néanmoins, que le ſiphon eſt percé au haut d'un trou où l'on a ſoudé un tuyau aſſez long pour que ſon extrémité ſupérieure qui eſt ouverte ſorte hors de l'eau de la cuve [*Fig. 44.*] (c'eſt afin que l'air touche le vif-argent qui eſt dans le tuyau,

comme il touche la furface de l'eau de la cuve, & que l'écoulement du vif-argent ne foit que l'effet de la preffion de l'eau de la cuve). Il eft certain que le vif argent du vaiffeau plus élevé coulera par le fiphon dans le vaiffeau qui eft plus bas; car la colomne d'eau qui répond à la branche la plus longue eft plus chargée que celle qui répond à la plus courte; celle-ci prévaudra donc fur celle-là, & fera couler le vif-argent dans le vaiffeau le plus bas.

A préfent concevons pue le trou qui eft à la partie fupérieure du fiphon eft fermé, que l'air prend la place de l'eau de la cuve, & l'eau la place du vif-argent: l'air qui touche la furface de l'eau du vaiffeau le plus bas eft plus chargé, puifqu'il agit contre la colomne d'eau de la branche la plus longue; l'air qui répond à la branche la plus courte prévaudra donc, & par la preffion qu'il caufe fur la furface de l'eau du vaiffeau le plus haut, il la fera defcendre par le fiphon dans le vaiffeau le plus bas.

50. 3°. Si le fiphon n'a qu'une branche, comme font les puife-liqueurs, par exemple, ceux des Cabaretiers, la liqueur ne coule point fi l'on bouche avec le doigt l'ouverture d'en-haut, & qu'on laiffe celle d'en-bas ouverte, car l'air qui agit également en tout fens fait effort pour s'infinuer dans le tuyau, mais il ne peut entrer qu'il ne divife la liqueur pour la faire fortir, ce qui n'arrive point, parce que l'ouverture eft petite; la force de l'air eft donc employée à foutenir la liqueur dans le fiphon, laquelle defcendroit fans cela par fon poids.

51. 4°. *Si on perce un tonneau plein de vin, il n'en lâche pas une goutte, à moins qu'on ne débouche le haut pour donner vent*; car la colomne de liqueur qui répond au trou eft trop foible pour furmonter l'action extérieure de lair; mais fi on donne vent, l'air qui entre dans le vaiffeau augmente la force de cette colomne, & la rend fupérieure à celle de l'air qui preffe au-dehors, c'eft pourquoi la liqueur coule; la même chofe arrive fi l'on fait deux trous au tonneau, l'un au-deffus de l'autre; mais fi les deux trous font également élevés, & fur la même ligne horizontale, le vin ne

coule point, car pour lors les colonnes de liqueur qui répondent aux deux trous étant égales & en même-tems trop foibles pour vaincre la résistance de l'air extérieur, l'une ne peut surmonter l'autre, ni la force de l'air qui s'oppose à leur sortie.

52. 5°. *Il est difficile d'ouvrir un soufflet dont toutes les ouvertures sont fermées*; car comme l'air qui est au-dehors ne peut entrer pour agir au-dedans du soufflet, il faut que la main qui en écarte les aîles surmonte la pression de l'air qui les presse au-dehors l'une contre l'autre.

53. 6°. *Si l'on prend un balon à demi-plein d'air, flasque & mou, qu'on le porte au bout d'un fil sur une montagne haute de cinq cent toises, à mesure qu'on monte il s'enfle de lui-même, & en redescendant il s'applatit peu à peu par les mêmes degrés, de sorte que lorsqu'il est arrivé au bas, il est revenu à son premier état.*

L'air est compressible, & il occupe d'autant moins de place qu'il est plus comprimé, si la compression diminue il s'étend & se dilate, parce qu'il est élastique : or l'air qui est dans les lieux bas est plus chargé, & par conséquent plus comprimé que l'air qui est sur une haute montagne; c'est pourquoi si l'on porte de cet qui est comprimé dans un lieu bas, sur une montagne, il doit se dilater à mesure qu'on approche du sommet, parce que la charge qui le comprime diminue; ainsi un balon à demi-plein d'un air plus condensé doit s'enfler lorsqu'on le porte sur une montagne, & il doit revenir à son premier état lorsqu'on est descendu.

54. 7°. Quoique l'air soit pesant, nous ne devons pas néanmoins sentir son poids. 1°. Par la raison que l'on ne sent point le poids de l'eau lorsqu'on s'y enfonce, quoiqu'elle soit pesante. 2°. Lorsque nous sentons les impressions que notre corps reçoit des objets qui nous environnent, cela arrive de la sorte, parce que les parties touchées changent de place; elles s'allongent ou bien elles se foulent, & se compriment, tandis que les autres se conservent dans leur situation : or le poids de l'air ne produit rien de sem-

blable sur nous, tout l'extérieur de notre corps en étant également pressé rien ne se dérange; d'ailleurs cette pression n'est point douloureuse, & y étant accoutumés dès notre naissance, elle nous est comme naturelle; il ne faut donc point s'étonner si elle n'excite aucune sensation quoiqu'elle soit très-réelle.

CHAPITRE II.

De l'équilibre des liqueurs avec les corps fermes.

55. LORSQU'ON pose un corps ferme sur une liqueur, il s'enfonce en tout ou en partie, si leger qu'il soit, car les colomnes de la liqueur étant en équilibre, celle qui est chargée du corps ferme deviênt par-là plus pesante que les colomnes environnantes, celles-ci étant trop foibles pour résister à ce surcroît de pesanteur, sont contraintes de céder. La pesanteur spécifique d'un corps ferme est égale à celle de la liqueur, ou bien elle est plus grande, ou moindre.

PROPOSITION VI.

56. *Un corps ferme qui est de même pesanteur spécifique qu'une liqueur, 1°. s'y enfonce entierement, 2°. il demeure dans l'endroit où l'on le met, 3°. il perd tout son poids.*

1°. Lorsqu'un corps ferme est posé sur une liqueur, les parties qu'il touche par sa surface inférieure font effort pour s'échapper en tout sens le long de cette surface (3); d'un autre côté la liqueur environnante s'oppose à cet effort, parce que par sa pesanteur elle tend à descendre, & par conséquent à s'insinuer par-dessous; mais parce qu'elle est plus foible, elle cede au plus grand effort; ainsi les parties qui sont immédiatement sous la pression du corps ferme s'échappent en glissant le long de sa surface inférieure, la colomne sur laquelle il est posé est donc rompue, & il s'enfonce; & parce que tant qu'il surnâge, la colomne sur la-

quelle il est posé, est plus pressée que les colomnes environnantes, il s'ensuit qu'il s'enfonce entierement.

2°. Lorsque le corps ferme est entierement enfoncé, la liqueur environnante tend encore à le soulever en s'insinuant par-dessous la surface inférieure; mais parce qu'il pese autant qu'un pareil volume de liqueur, il résiste à cet effort avec une force égale, ainsi il demeure dans l'endroit où il se trouve.

3°. Puisque le corps demeure dans l'endroit où il se trouve, tout son poids est soutenu par la liqueur; ainsi il le perd de maniere qu'il n'est plus besoin d'une force externe pour le soutenir.

Des corps fermes dont la pesanteur spécifique est plus grande.

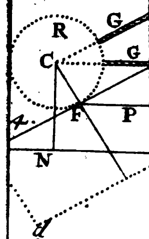
57. Un corps ferme qui pese plus qu'un pareil volume d'une liqueur, s'y enfonce entierement, & à quelque endroit que l'on le mette, à la surface, ou au dedans de la liqueur, la colomne dont il fait partie devient plus pesante que les colomnes environnantes; celles-ci sont donc contraintes de céder, & celle où le corps ferme se trouve est nécessairement rompue, comme on vient de voir dans la Proposition précédente.

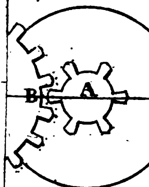
PROPOSITION VII.

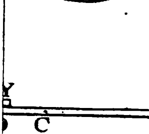
58. *Un corps ferme qui s'enfonce de lui-même dans une liqueur, perd de son poids autant que pese le volume de liqueur dont il tient la place.* Car la liqueur environnante feroit équilibre avec ce corps, s'il étoit de même pesanteur spécifique, & il perdroit sa pesanteur (56. *n.* 3): or quoiqu'il soit plus pesant, & qu'il aille au fond, cela n'empêche point que la liqueur n'agisse avec autant de force que s'il étoit de même pesanteur spécifique, & qu'elle ne contrebalance dans ce corps une partie de son poids égale à la force avec laquelle elle agit, & par conséquent égale au poids d'un volume de liqueur égal à celui du corps plongé.

59. *Coroll.* 1°. *Les pesanteurs spécifiques de la liqueur,*

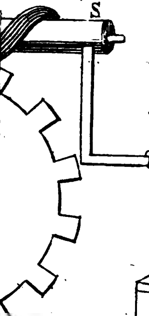
&

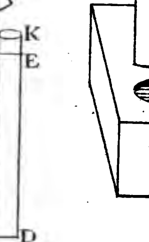


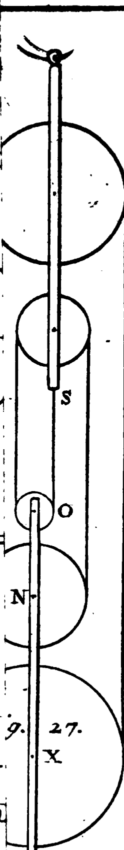




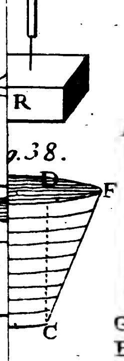








g. 27.



g. 38.

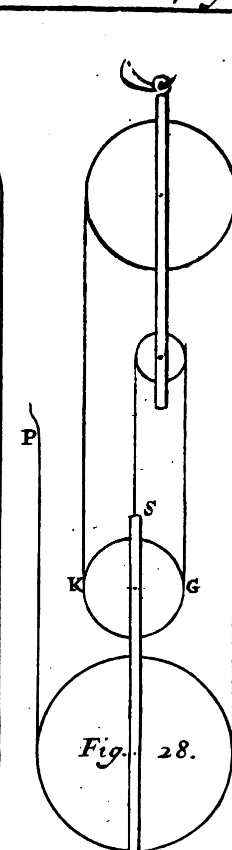
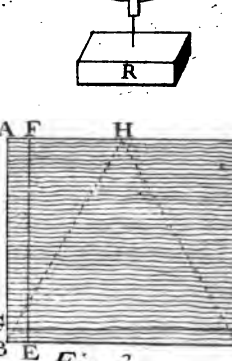


Fig. 28.



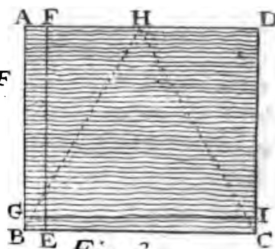
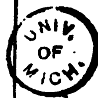


Fig. 39.



& du solide plongé, sont entr'elles comme la partie perdue est au poids entier du corps : si le corps pese trois fois davantage, il perdra un tiers de son poids ; ainsi les pesanteurs spécifiques sont entr'elles comme 1 *&* 3. Car lorsque les volumes sont égaux, les pesanteurs spécifiques sont entr'elles comme les pesanteurs absolües (*Liv. II*, 24) : or les pesanteurs absolues de la liqueur & du corps plongé sont entr'elles comme la partie perdue du poids, & le poids entier, puisqu'elles n'en different point; donc les pesanteurs spécifiques, &c.

60. 2°. Plus la pesanteur spécifique d'un solide est grande, moins il perd de son poids; si elle est triple, il perd le tiers de son poids; si elle est quintuple, le corps ne perd que la cinquiéme partie de son poids.

61. 3°. *Si on plonge un même corps dans différentes liqueurs, leurs pesanteurs spécifiques sont entr'elles comme les pertes que le corps plongé y fait* ; car les liqueurs pesent en pareil volume autant que le corps plongé perd (58) : or lorsque les volumes sont égaux, les pesanteurs spécifiques sont comme les pesanteurs absolues donc elles sont comme les pertes.

62. 4°. Si l'on plonge deux corps de même volume dans une liqueur, ils perdent également de leurs poids, sçavoir, autant que pese le volume de liqueur dont ils tiennent la place.

63. 5°. Si les volumes sont inégaux, leurs pertes sont comme les volumes ; car ils perdent autant que pesent les volumes de liqueur dont ils tiennent la place. Si les volumes plongés sont de même matiere, les pertes sont comme les poids ou quantités de matiere qu'ils contiennent ; car les poids des corps de même matiere sont comme les volumes ; donc les pertes sont entr'elles comme les poids.

64. 6°. Si les corps plongés pesent également, les pesanteurs spécifiques sont entr'elles réciproquement comme les pertes ; car les pertes sont comme les volumes, mais lorsque les pesanteurs absolues sont égales, les pesanteurs spécifiques sont entr'elles réciproquement comme les vo-

lumes (*Liv. II.* 25); donc elles ſont entr'elles réciproquement comme les pertes.

65. 7°. Si deux corps de volumes inégaux peſent également dans l'air, leurs peſanteurs abſolues ſont inégales : car puiſque les volumes ſont inégaux, ils perdent inégalement dans l'air : or ſi aux peſanteurs dans l'air, leſquelles ſont égales, on ajoute les pertes inégales qu'ils ſont, les ſommes qui compoſent les peſanteurs abſolues ſont inégales.

PROBLÊME III.

66. *Trouver le rapport des peſanteurs ſpécifiques d'un ſolide avec une liqueur qui peſe moins.*

1°. Il faut peſer le corps dans l'air avec une bonne balance, & connoître en livres ou en parties de la livre, le poids avec lequel il fait équilibre. 2°. Il le faut peſer une ſeconde fois dans la liqueur en le ſuſpendant avec un fil à l'un des bras de la balance, & connoître auſſi en livres ou parties de la livre le poids avec lequel il fait équilibre étant ainſi plongé. 3°. La différence des poids qui ont ſervi à le peſer eſt la perte que ce corps fait dans la liqueur ; or les peſanteurs ſpécifiques ſont entr'elles comme le poids entier, & cette perte (59). Si un volume d'or peſe, par exemple, dans l'air 76 gros, & qu'il n'en peſe dans l'eau que 72, il perdra 4 gros; donc les peſanteurs ſpécifiques ſont entre elles comme 76 & 4, ou comme 19 & 1.

67. S'il faut trouver les peſanteurs ſpécifiques de deux corps qui peſent également, on le fera par ce qui vient d'être dit, 1°. en les peſant dans l'air, 2°. dans la liqueur, & par ce qui a été dit dans le Coroll. 6: mais ſi les corps peſent inégalement, après qu'on aura trouvé ce qu'ils peſent dans l'air, & les pertes qu'ils font étant plongés dans la liqueur, il faut faire une regle de trois pour trouver la perte que l'un d'eux feroit s'il peſoit autant que l'autre, & le reſte comme il eſt dit au Corollaire 6.

68. La Propoſition & ſes Corollaires donnent un moyen de connoître ſi une matiere plus peſante que la liqueur dans laquelle on la plonge eſt pure, ou mélangée, & la

quantité du mélange. Nous prendrons pour exemple la couronne d'Hyeron, Roi de Syracuſe. Ce Prince avoit chargé un Orfévre de faire une couronne d'or du poids de 18 livres: lorſqu'elle fut faite, Archimede eut ordre d'éxaminer ſi elle étoit d'or pur; & au cas que l'Orfévre eût mêlé de l'argent avec l'or dans ſon ouvrage, de découvrir en quelle quantité, ſans néanmoins l'endommager.

PROBLÊME IV.

69. *Trouver en quelle quantité l'or & l'argent pouvoient être mêlés dans la couronne d'Hyeron.*

1°. Il faut plonger la couronne dans l'eau & obſerver la perte qu'elle y fait de ſon poids : ſuppoſons qu'elle perd $\frac{1}{15}$, comme elle peſe 18 livres ſa perte eſt $\frac{18}{15}$ de livre : on ſçait d'ailleurs que l'or & l'argent perdent l'un $\frac{1}{19}$, & l'autre $\frac{1}{10}$ de leurs poids; c'eſt pourquoi ſi on ſuppoſe deux maſſes, l'une d'or & l'autre d'argent de même poids que la couronne, elles perdront $\frac{18}{19}$ & $\frac{18}{10}$: ainſi les pertes de ces deux maſſes & celles de la couronne ſont $\frac{18}{19}$, $\frac{18}{10}$ & $\frac{18}{15}$; d'où l'on voit que ſelon l'hypothèſe la couronne n'eſt ni toute d'or, ni toute d'argent, puiſqu'elle perd davantage que la maſſe d'or pur, & moins que la maſſe d'argent, l'un & l'autre de même poids que la couronne. 2°. Il faut déterminer les pertes que l'or & l'argent mêlés dans la couronne, font étant plongés dans l'eau. Comme leurs poids ſont inconnus, nous nommerons x celui de l'or; donc $18 - x$ eſt celui de l'argent : or puiſque l'or perd la dix-neuviéme partie de ſon poids & l'argent la dixiéme, il s'enſuit que $\frac{x}{19}$ & $\frac{18-x}{10}$ ſont les pertes cherchées; de plus ces pertes ſont égales enſemble à celle de la couronne, puiſqu'elle n'eſt compoſée que de l'or & de l'argent dont on trouve ici les pertes; donc $\frac{x}{19} + \frac{18-x}{10} = \frac{18}{15}$; il faut ôter les fractions en indiquant ſeulement les multiplications qu'il faut faire pour cela, & l'on aura $15 \times 10x + 15 \times 19 \times 18 - 15 \times 19x = 10 \times 19 \times 18$. Cela fait, il faut 1°. retrancher de part & d'autre $10 \times 19 \times 18$, 2°. effacer dans $-15 \times 19x$, $+15 \times 10x$, parce que les ſignes ſont contraires, & la réduc-

tion faite, on aura $5\times19\times18-15\times9x=0$ & $5\times19\times18=15\times9x$ & $x=\frac{5\times19\times18}{15\times9}=\frac{19\times2}{3}=\frac{38}{3}=12\frac{2}{3}$, c'est-à-dire, qu'il y avoit 12 livres $\frac{2}{3}$ d'or, & 5 livres $\frac{1}{3}$ d'argent. 1°. Ces deux nombres font 18 livres, poids de la couronne : 2°. les pertes que ces portions d'or & d'argent font dans l'eau sont égales ensemble à la perte de la couronne ; la perte de $\frac{38}{3}$ livres d'or $=\frac{38}{3\times19}$, puisque l'or perd la 19ᵉ partie de son poids. Or ce nombre $=\frac{2}{3}$, en divisant les deux termes par 19 ; $\frac{16}{3}$ étant l'argent mêlé, $\frac{16}{3\times10}$ est la perte de cette portion d'argent, puisque l'argent perd la dixiéme partie de son poids ; ainsi les pertes sont $\frac{2}{3}$ & $\frac{16}{3\times10}$: or la somme de ces deux fractions est $\frac{36}{30}$ ou $\frac{18}{15}$, perte de la couronne.

Des corps fermes dont la pesanteur spécifique est moindre.

70. Ces corps ne s'enfoncent point entierement dans la liqueur sur laquelle on les pose ; car si cela arrivoit, la colomne dans laquelle ils seroient, étant plus légere que les colomnes environnantes, seroit obligée de céder.

PROPOSITION VIII.

71. *Un corps moins pesant s'enfonce jusqu'à ce que la partie enfoncée occupe la place d'un volume de liqueur de même pesanteur que le corps entier.* Car le volume de liqueur dont la partie enfoncée tient la place, fait équilibre par son poids avec les colomnes environnantes : or le solide fait aussi équilibre par son poids avec les colomnes environnantes ; donc ce corps pese autant que le volume de liqueur dont la partie enfoncée tient la place.

72. *Les pesanteurs spécifiques d'une liqueur & d'un corps qui y surnâge, sont entr'elles comme le volume du corps entier est à la partie enfoncée* ; car ce corps pese autant que le volume de liqueur qu'il fait sortir de sa place (71) ; donc leurs pesanteurs spécifiques sont entr'elles réciproq. comme les volumes (*Liv. II.* 25) ; si au lieu du volume de liqueur on prend la partie enfoncée, la pesanteur spécifique du solide sera à celle de la liqueur comme la partie enfoncée est au

corps entier. Suppoſons que le corps s'enfonce d'un tiers, il eſt évident qu'un volume de la liqueur, triple de la partie enfoncée peſera trois fois davantage que le corps ferme, qu'ainſi la peſanteur du ſolide en volume égal, ne ſera que le tiers de celle de la liqueur, c'eſt-à-dire, comme la partie enfoncée eſt au ſolide entier.

73. *Si on met un corps moins peſant ſur deux liqueurs, leurs peſanteurs ſpécifiques ſont entr'elles réciproquement comme les parties enfoncées;* car les deux volumes de liqueur que le ſolide déplace, peſent également, autant que le ſolide (71); donc leurs peſanteurs ſpécifiques ſont entre elles réciproquement comme ces volumes ou comme les parties enfoncées (*Liv. II.* 25.)

74. Deux corps qui peſent également s'enfoncent autant l'un que l'autre, ou ce qui revient au même, ils déplacent un égal volume de liqueur, puiſqu'ils peſent également, & que d'ailleurs les volumes déplacés peſent autant que les ſolides.

75. *Les peſanteurs ſpécifiques de deux corps de même volume ſont entr'elles comme les parties enfoncées dans une même liqueur;* car les peſanteurs ſpécifiques de deux corps de même volume, ſont entr'elles comme leurs peſanteurs abſolues (*Liv. II.* 24) : or les peſanteurs abſolues des deux ſolides ſont égales aux poids des volumes de liqueur qu'ils déplacent; donc leurs peſanteurs ſpécifiques ſont entr'elles comme ces volumes, ou comme les parties enfoncées.

76. *Si on enfonce entierement un corps qui ſurnâge, il faut la même force à quelque profondeur qu'on le faſſe deſcendre;* car ſi le ſolide étoit de même peſanteur ſpécifique que la liqueur, ſon poids ſuffiroit pour le tenir enfoncé à toutes les profondeurs où l'on le feroit deſcendre (58); donc une force qui avec le poids du corps égalera cette peſanteur, pourra produire le même effet.

77. Les Coroll. précédens donnent des moyens aiſés de déterminer les peſanteurs ſpécifiques de deux ſolides qui ſurnagent, & celles de deux liqueurs; il faut que les ſolides ſoient de figure cylindrique ou parallelopipede, & que leurs

bafes foient affez grandes pour qu'ils ne fe renverfent point.

PROBLÊME V.

78. *Trouver la charge d'un navire.*

La pefanteur totale d'un navire eft compofée de deux parties, 1°. du poids du navire, 2°. de la charge qu'il porte; chacune de ces deux pefanteurs partielles produit un enfoncement, & déplace un volume d'eau ; le navire pefe autant que le volume d'eau déplacé dans le premier enfoncement, la pefanteur du navire jointe à fa charge produit un fecond enfoncement, & ces deux pefanteurs enfemble font égales à celles du volume d'eau qu'elles déplacent; fi de l'enfoncement total on retranche le premier, leur différence fera l'enfoncement produit par la charge du navire, laquelle eft égale au volume d'eau qu'elle déplace : or ce volume eft compris entre la coupe horizontale du navire à fleur d'eau lorfqu'il n'eft point chargé, & la coupe horizontale à fleur d'eau lorfqu'il eft chargé ; il ne s'agit donc que de connoître le poids de ce volume d'eau. Cette connoiffance dépend en partie de la Géom. & en partie de l'expérience; la Géom. enfeigne à mefurer le folide d'eau compris entre les deux coupes horizontales dont on vient de parler ; fi elles étoient égales il faudroit multiplier l'une d'elles par leur diftance, car pour lors le volume d'eau déplacé auroit la figure d'un prifme ; mais il y en a une plus grande que l'autre : afin d'approcher de la vérité fans trop négliger, il faut mefurer chacune à part, faire une fomme des deux, & en prendre la moitié pour avoir comme une coupe horizontale moyenne qu'il faut multiplier par la diftance entre les deux coupes extrêmes, & l'on aura le folide d'eau que la charge du navire déplace. Les coupes dont il s'agit font fort irrégulieres : pour les mefurer avec facilité fans néanmoins négliger la précifion, il faut les divifer en plufieurs parties que l'on regardera comme des trapezes ou des triangles, parce qu'elles approchent beaucoup de ces figures.

Suppofons que la coupe inférieure contient 2238 pieds

quarrés, & la coupe supérieure 3087, la moitié de leur somme 2662 ½, si on multiple cette surface par la distance des deux coupes, supposée de 7 pieds, le produit 18637 ½ est le solide d'eau en pieds cubes déplacé par la charge du navire. Cela fait, il faut évaluer ce solide en livres : or le pied cube d'eau de mer pese environ 72 livres si on multiplie 18637 ½ par 72, le produit 1341900 est la charge du navire en livres. Ceux qui désirent s'instruire plus particulierement de la maniere de faire le calcul des deux coupes horizontales qui terminent le solide d'eau déplacé par la charge, & de prendre leur distance, peuvent lire l'instruction abregée de M. de Mairan pour le jaugeage des navires, Mémoire 1724, pag. 227.

CHAPITRE III.

De l'équilibre & de la pression des fluides par le ressort.

79. ENtre les fluides que l'on connoît il n'y a gueres que l'air & la flamme qui aient une force de ressort assez grande pour faire équilibre avec les autres corps : le ressort de l'air se manifeste soit en se dilatant, soit en se condensant ; la flamme ordinaire n'est pas si traitable que l'air, elle s'éteint & se dissipe aussi-tôt qu'on veut la comprimer ; mais la flamme de la poudre à canon dure quelque tems sans s'éteindre étant comprimée. On remarque aussi que l'eau qui paroît destituée de ressort lorsqu'elle est dans son état naturel, a néanmoins une grande vertu élastique lorsqu'elle est réduite en vapeur par l'action du feu, puisqu'elle a assez de force pour mouvoir de grandes machines. Nous nous bornons ici à exposer quelques-unes des principales propriétés du ressort de l'air. 1°. Nous verrons dans quel rapport il se comprime ; 2°. quelle peut être la hauteur ou l'étendue de l'atmosphere ; 3°. les differens degrés de

condensation & de dilatation de l'air dans les vaisseaux qui le contiennent.

Du rapport des condensations de l'air.

80. Personne n'ignore que l'air peut se condenser & se dilater, c'est-à-dire, occuper un espace plus ou moins grand sans augmenter ou diminuer en quantité. On observe que le froid condense l'air & diminue son ressort, & qu'au contraire la chaleur tend à le rarefier & qu'elle en augmente le ressort. Car si l'on présente au feu une vessie à demie pleine d'air, on voit qu'elle s'enfle & se durcit ; & lorsqu'on la retire, elle redevient molasse & son volume diminue. Ce n'est point la condensation de l'air produite par le froid, ni sa dilatation causée par la chaleur que nous avons à considérer ici, mais sa condensation en tant qu'elle est l'effet d'une cause externe, & sa dilatation en tant qu'elle est une suite de l'affoiblissement ou de la diminution de cette cause.

81. *Le ressort de l'air presse avec une force égale à celle qui le comprime.* Car la réaction d'un ressort qui peut être encore comprimé, est égale à la force comprimante, puisque si la réaction du ressort étoit plus grande, il se détendroit ; & si la force comprimante excédoit, le ressort se comprimeroit davantage.

82. On dit qu'un ressort se comprime dans la proportion des poids, lorsque les espaces auxquels il est réduit par ces poids sont d'autant moindres que les poids sont plus grands ; ainsi si un poids double réduit un ressort à occuper un espace deux fois moindre, les condensations sont comme 2 & 1 ; d'où l'on voit que les condensations sont entr'elles réciproquement comme les espaces qu'il occupe ; c'est pourquoi c'est une même chose de dire qu'un ressort se comprime dans la proportion des poids, ou qu'il occupe des espaces qui sont dans la raison réciproque des poids qui le compriment.

PROPOSITION IX.

83. *L'air ſe comprime dans la proportion des poids.* Cette Propoſition ſe prouve par l'expérience, elle eſt de M. Mariotte.

Préparation. Il faut avoir un tuyau recourbé ADEB [*Fig.* 45.] dont les branches paralleles ſoient fort inégales en longueur, la plus longue ouverte & la plus courte fermée à leurs extrémités ſupérieures. Si par l'ouverture A on verſe un peu de vif-argent qui rempliſſe la partie horizontale DE du tuyau ſans monter dans aucune des deux branches, on ſçaura que l'air qui eſt dans la branche moins longue eſt dans ſon état naturel, c'eſt-à-dire, dans le même degré de compreſſion que l'air extérieur, car ſi le vif-argent montoit dans la courte branche, le reſſort de l'air qu'elle contient ſeroit plus foible, puiſque l'air extérieur feroit équilibre avec le reſſort de cet air, & avec le vif-argent qui monteroit dans cette branche; ce ſeroit le contraire ſi le vif-argent montoit dans la plus longue branche. Il faut enſuite continuer de verſer du vif-argent par l'ouverture A, il eſt viſible qu'il montera en partie dans la branche EB. Cela poſé,

84. Si les eſpaces que l'air condenſé occupe dans la branche EB ſont entr'eux réciproquement comme les poids dont il eſt chargé, il eſt certain qu'il ſe comprime dans la proportion des poids (82): or ſuivant l'expérience de M. Mariotte la branche EB ayant 12 pouces de haut, ſi l'air qu'elle contient eſt réduit à la hauteur IB de 8 pouces, la colomne de mercure qui eſt au-deſſus du niveau LI, a 14 pouces de haut; l'air de la branche EB eſt donc chargé par le poids d'une colomne de vif-argent de 14 pouces, & par le poids de l'air extérieur équivalent à 28 pouces de vif-argent; ainſi la charge de l'air IB eſt égale au poids d'une colomne de mercure de 42 pouces; & lorſqu'il occupe la hauteur EB de 12 pouces, ſa charge eſt égale au poids d'une colomne de mercure de 28 pouces; mais les eſpaces 12 & 8 ſont entr'eux réciproquement comme les poids

28 & 42 ; donc les condensations de l'air sont entr'elles comme les poids.

Si l'air étoit réduit à occuper la hauteur BO de 6 pouces, le poids que cet air supporteroit seroit égal à une colomne de mercure de 28 pouces, & au poids de l'air extérieur équivalent à une autre colomne pareillement de 28 pouces ; ainsi toute la charge de cet air seroit égale au poids d'une colomne de mercure de 56 pouces : or les espaces 12 & 6 sont entr'eux réciproquement comme les poids 28 & 56. Il en est de même des autres condensations.

85. *Corollaires.* 1°. *Les forces avec lesquelles un même air differemment condensé réagit, sont entr'elles réciproquement comme les espaces qu'il occupe.* Car ces forces sont égales aux forces qui le compriment (81) : or ces forces sont entr'elles réciproquement comme les espaces qu'il occupe (82. 83) ; donc, &c.

86. 2°. *Si deux poids égaux compriment des quantités inégales d'un même air, les espaces qu'elles occupent par les condensations, sont entr'eux comme ces quantités ;* ainsi si un poids réduit un pied cube d'air à n'occuper que la moitié de cet espace, le même poids réduira trois pieds cubes d'air à occuper un espace de trois demi-pieds cubes, chaque pied cube perdant la moitié de son volume, autrement un même air ne se condenseroit pas dans la proportions des poids.

87. 3°. *Si deux poids inégaux compriment deux volumes d'air égaux entr'eux, leurs densités sont comme les poids ;* autrement l'air ne se comprimeroit pas dans la proportion des poids.

De la hauteur ou de l'étendue de l'atmosphere.

88. Après que M. Mariotte eut trouvé par ses expériences que l'air se condense dans la proportion des poids, il fit l'application de cette regle à la compression de l'atmosphere par son propre poids. M. Mariotte conçoit l'atmosphere divisée en 4032 divisions de même pesanteur ou

qui contiennent toutes la même quantité d'air : or dans 28 pouces de mercure il y a 4032 douziémes de ligne ; donc suivant cette supposition chaque division pese autant qu'un douziéme de ligne de mercure ; de plus une ligne fait équilibre auprès de la terre avec 60 pieds d'air ; donc un douziéme de ligne fait équilibre avec 5 pieds d'air ; ainsi l'air de la 1re division occupe 5 pieds ; & parce que la 2016 division au-dessus de la terre n'est chargée que de la moitié du poids de l'atmosphere, c'est-à-dire, par un poids équivalent à 14 pouces de mercure, il s'ensuit que cette division occupera 10 pieds (83). 2°. Depuis la 2016 division jusqu'à la 1008, l'air se dilate de maniere qu'à cette 1008 division il occupe un espace deux fois plus grand qu'à la 2016, c'est-à-dire 20 pieds, car à la 2016 il est chargé comme d'une colomne de mercure de 14 pouces, & à la 1008, il n'est chargé que comme il le seroit par une colomne de 7 pouces, puisque le nombre de divisions qui sont au-dessus de celle-ci est deux fois moindre. 3°. A la 504 division l'air occupe 40 pieds ; par une raison semblable, à la 252 il occupe 80 pieds : à la 126 il occupe 160 pieds : à la 63 il occupe 320 pieds : à la $31\frac{1}{2}$ 640 pieds ; & ainsi de suite jusqu'à la derniere division à laquelle M. Mariotte donne 15120 pieds : par-là il partage toute l'atmosphere en 12 ou 13 portions, chacune est terminée par deux divisions, l'une inférieure où l'air est deux fois moins dilaté que dans la supérieure, c'est-à-dire, dans la raison réciproque des poids : or quoique l'air se dilate dans la raison réciproque des poids, & que pour trouver sa dilatation dans deux divisions éloignées l'une de l'autre, il soit nécessaire d'opérer selon la proportion géométrique, néanmoins à cause du grand nombre que M. Mariotte en conçoit dans l'atmosphere, il suppose que d'une division à la suivante on peut trouver cette dilatation en opérant selon la proportion arith. dans cette supposition l'air se dilate depuis la division inférieure qui termine unepartie des douze portions jusqu'à la supérieure dans la progression arithmétique ; & comme il y a 12 portions, on a aussi 12 progressions arithméti-

ques, dans chacune desquelles on connoît les extrêmes & le nombre des termes ; donc on peut trouver la somme de chacune ou la somme des dilatations de l'air (25. *Arith.*) ; ainsi pour trouver l'étendue de l'air depuis la premiere division qui occupe 5 pieds jusqu'à la 2016 qui en occupe 10, il faut ajouter les extrêmes 5 & 10, & multiplier la somme 15 par la moitié du nombre des termes qui est 1008, & le produit 15120 pieds est l'étendue cherchée (25. *Arith.*). Si l'on fait le calcul pour les autres progressions, on trouve qu'elles donnent toutes la même étendue de 15120 pieds ; & si l'on multiplie ce nombre par 12, le produit 181440 pieds qui font 15 petites lieues, est la hauteur de l'air sensible. M. Mariotte ajoute que quand on supposeroit que l'air peut se dilater 32256 fois davantage qu'ici bas, suivant son calcul, toute l'étendue de l'air ne pourroit aller qu'à environ 20 lieues.

Voici une autre méthode de déterminer les limites de l'air sensible.

1°. *Il faut concevoir que toute la hauteur ou la colomne d'air qui est au-dessus de la terre est divisée en tranches de même épaisseur, dans cette hypothèse, les tranches ou volumes étant égaux, les densités sont comme les poids qui les chargent* (87). De plus ces poids sont en progression géométrique. *Pour le prouver*,

Soit nommé A *le poids qui charge la premiere couche*, B *celui qui charge la seconde*; C *celui qui charge la troisiéme*, D *celui qui charge la quatriéme*, *&c. la premiere couche ou tranche sera* A—B, *c'est-à-dire*, *le poids de toute la colomne d'air moins la colomne qui s'appuie sur cette tranche*, *la seconde sera* B—C, *la troisiéme* C—D, *&c. Cela posé puisque les densités des tranches ou les quantités d'air qu'elles contiennent sont comme les poids qui les chargent* (87), *nous aurons* A.A—B :: B.B—C : *si des antécedens on retranche les conséquens*, *&* *qu'on compare les antécedens aux restes*, *nous aurons* A . A—A+B :: B . B—B+C, *& la réduction étant faite* A . B :: B . C, *c'est-à-dire*, *que les trois poids* A, B, C *sont en proportion continue. On fera voir de la*

même maniere que B.C :: C.D, *& que par conséquent tous ces poids pris de suite sont en progression géométrique.*

D'où il suit que les dilatations de l'air étant dans la raison réciproque des poids, sont une progression géométrique croissante tandis que la progression des poids est décroissante : dans chaque couche ou tranche il faut considérer son épaisseur, elle est égale dans toutes, & sa rareté ou la dilatation de l'air.

2°. Les hauteurs d'air sont en progression arithmétique. *Car les épaisseurs des tranches étant égales, les hauteurs sont proportionnelles aux nombres de ces tranches : un nombre de tranches deux, trois fois plus grand donne une hauteur d'air deux, trois fois plus grande : nous avons donc deux progressions croissantes, l'une géométrique, elle est pour les dilatations de l'air ; l'autre arithmétique, elle est pour les hauteurs d'air. 3°. Lorsque des grandeurs sont en progression géométrique, leurs logarithmes sont en progression arithmétique, comme sçavent ceux qui ont la connoissance des tables des logar. : or c'est une propriété de la progression arithmet. croissante, que chaque terme contient le premier, & la différence qui regne dans la progression autant de fois qu'il y a de termes depuis le premier inclusivement jusqu'à ce terme exclusivement. Soit la progression arithmétique 1,3,5,7, &c. il est évident que le troisiéme terme 5 contient le premier terme 1 & deux fois la différece 2, que le quatriéme terme 7 contient le premier terme 1 & 3 fois la différence 2, &c.*

3°. *Dans la colomne d'air qui s'étend depuis la terre jusqu'au haut de l'atmosphere, ne considerons que les dilatations de trois tranches, par exemple, de la premiere, de la dixiéme & de la centiéme ; par la propriété de la progression arithmétique, le logarithme de la dilatation de la dixiéme tranche, contiendra le logarithme de la dilatation de le premiere, & 9 fois la différence qui regne dans la progression des logarith. pareillement le logarith. de la dilatation de la centiéme tranche contiendra le logarith. de la dilatation de la premiere, & 99 fois la différence de la progression ; de sorte que si des logarith. des dilatations de la dixiéme & de la centiéme tranches, on retranche le logarithme de la dila-*

Quoique tous ces calculs ne s'accordent pas de point en en point, & ne donnent pas avec la derniere précision les mêmes résultats, pour plusieurs raisons qu'il seroit trop long d'exposer ici, ils sont néanmoins assez d'accord pour faire entendre qu'il n'y a gueres moins de 30000 toises d'air grossier ou sensible au-dessus de la terre, & qu'il n'y en a gueres plus de 40000 ; qu'ainsi cette hauteur est d'environ 20 lieues.

De la condensation & dilatation de l'air dans les Vaisseaux.

90. On peut condenser l'air soit en diminuant la capacité du vaisseau, soit en y introduisant du nouvel air ; on peut aussi le rarefier en augmentant la capacité du vaisseau, ou bien en évacuant l'air en partie.

PROPOSITION X.

91. *Si on introduit de l'air dans un vaisseau, ce qu'on exécute par le moyen d'une seringue ou corps de pompe, il en faut multiplier la capacité par le nombre de fois qu'on l'a vuidé, au produit ajouter la capacité du vaisseau ; cela fait, l'air condensé est à l'air primitif comme cette somme est à la capacité du vaisseau.*

Supposons que le corps de pompe soit égal au vaisseau, & quil a été vuidé trois fois, il est visible qu'il y a dans le vaisseau quatre fois plus d'air qu'il n'y en avoit ; ainsi l'air condensé est à l'air primitif comme 4 à 1 : or le produit de la capacité du corps de pompe par le nombre de fois qu'il a été vuidé est 3 ; si à ce produit on ajoute la capacité du vaisseau, la somme sera 4 ; donc l'air condensé est à l'air primitif dans le rapport énoncé. On apperçoit que la proportion a lieu soit que l'on suppose le vaisseau plus grand ou plus petit que la capacité du corps de pompe.

92. On dilate ordinairement l'air avec la machine *pneumatique* que l'on appelle aussi machine du vuide : elle est composée de 4 ou 5 pieces principales, d'une platine A [*Fig.* 46.] percée à son centre C, le récipient R est une espèce

avec la même vitesse qu'elle acquerroit en tombant de la hauteur FC, la tranche MN avec la vitesse qu'elle acquerroit par FG; la tranche IL avec la vitesse qu'elle acquerroit par FS, &c. ce qui est évident (19.20) si on imagine que le fond du vaisseau monte à mesure que la liqueur s'écoule au lieu de concevoir que c'est le niveau AE qui descend; car lorsque le fond sera arrivé à l'endroit d'une tranche & qu'il la touchera, la tranche étant pressée par le poids de la liqueur qui est au-dessus recevra, la vitesse que ce poids peut communiquer. 3°. Le tems qu'une tranche emploie à sortir est d'autant plus long que la base du vaisseau est plus grande que l'ouverture; ainsi si le fond du vaisseau est 100 fois plus grand, chaque tranche sera 100 fois plus de tems à sortir que s'il étoit égal à l'ouverture : cela est évident puisqu'il doit passer par l'ouverture un volume 100 fois plus grand avec la même vitesse.

PROPOSITION III.

27. *Si on multiplie le tems que la lame* F *mettroit à descendre librement depuis le niveau de la liqueur jusqu'à la base du vaisseau, par le quotient qu'on trouve en divisant cette base par l'ouverture* C, *je dis que le produit est égal au tems de l'écoulement entier.* [Fig. 51.]

Supposons que la lame F descend effectivement, & que l'ouverture C est contenue 100 fois dans la base BD. Lorsque la lame F arrive à l'endroit d'une tranche, par exemple en S, elle a acquis la vitesse avec laquelle cette tranche doit sortir (19. 20.); de sorte que si la tranche étoit égale à l'ouverture C de même que la lame F, elle ne seroit pas plus de tems à sortir que la lame F à traverser l'épaisseur S de la tranche IL avec la vitesse acquise depuis le niveau jusqu'à S; ainsi si les tranches étoient égales à la lame F ou à l'ouverture C, le tems de l'écoulement entier seroit égal au tems de la descente de la lame F par la hauteur FC : mais puisque les tranches sont 100 fois plus grandes que FC ou que l'ouverture C, le tems qu'elles seront à passer par cette ouverture, est 100 fois plus long que le tems de la descente par FC; donc pour avoir le tems entier de l'écoulement,

il faut multiplier le tems de la descente le long de FC, par le quotient 100 que l'on trouve en divisant le fond du vaisseau par l'ouverture C.

28. *Coroll*. 1°. *Si la hauteur & la base du vaisseau demeurent les mêmes, les tems que le vaisseau mettra à se vuider sont entr'eux réciproquement comme les différentes ouvertures* C. Car les tems des descentes par la hauteur commune FC étant les mêmes, les tems des écoulemens sont entr'eux comme les quotiens qui résultent en divisant la base BD par les différentes ouvertures C (27) : or ces quotiens sont entr'eux réciproquement comme ces ouvertures (23. *Arith.*). Donc, &c.

29. 2°. *Si le vaisseau* ABDE *étant entretenu plein, fournit pendant un tems égal à celui qu'il mettroit à se vuider, il donnera une quantité de liqueur double de ce qu'il en contient ou de ce qu'il en donne lorsqu'il se vuide entierement.*

Supposons que l'ouverture C est la centiéme partie de la base BD, la liqueur contenue dans le vaisseau est équivalente à une colomne centuple de FC. Cela posé, dans un tems égal au tems de la descente par FC, la lame qui sort par l'ouverture C, le vaisseau étant entretenu plein, a une vitesse avec laquelle elle parcourt un espace double de FC (*Liv. II.* 29.) & (*Liv. VI.* 19. 20.), c'est-à-dire, que dans le tems de la descente par FC il sort du vaisseau une colomne double de FC, le vaisseau étant entretenu plein; donc dans un tems centuple il sort 100 colomnes doubles de FC, & par conséquent une quantité de liqueur double de ce que le vaisseau contient : or le vaisseau se vuide entierement dans un tems centuple du tems de la descente par FC; donc dans un tems égal à celui que le vaisseau met à se vuider, s'il est entretenu plein, il donne une quantité de liqueur double de celle qu'il contient.

PROBLÊME IV.

30. *Le bassin d'une fontaine a trois ouvertures : par la premiere l'eau s'écoule en 3 heures, par la seconde en 5, & par la troisiéme en 6 : on demande en combien de tems tout le bassin plein d'eau s'écouleroit, si on ouvroit en même-tems toutes ses ouvertures.*

Nous avons vu (28) que si la hauteur du vaisseau & le fond demeurent les mêmes, les tems des écoulemens sont entr'eux réciproquement comme les ouvertures C. Cela étant, si nous nommons 1 l'ouverture par où le bassin se vuide en 3 heures, les proportions suivantes donneront les ouvertures par où il se vuide en 5 & 6 heures; $5 . 3 :: 1 . \frac{3 \times 1}{5}$, & $6 . 3 :: 1 . \frac{3 \times 1}{6}$; ces deux fractions sont les ouvertures correspondantes à 5 & à 6 heures; ainsi les trois ouvertures sont 1, $\frac{3}{5}$ & $\frac{3}{6}$, ces trois nombres étant réduits au même dénominateur donnent les trois fractions $\frac{30}{30}$, $\frac{18}{30}$ & $\frac{15}{30}$, & leur somme $\frac{63}{30}$ représente les trois ouvertures considerées comme une seule : or dans l'hypothèse présente les tems des écoulemens sont entr'eux réciproquement comme les ouvertures (28); donc $\frac{63}{30} . 1 :: 3 . x = \frac{1 \times 3 \times 30}{63} = \frac{90}{63} = 1 \frac{27}{63}$ ou $1 \frac{3}{7}$; ainsi le vaisseau sera 1 heure $\frac{3}{7}$ à se vuider.

De la mesure des eaux.

31. On mesure ordinairement les eaux par lignes, pouces, pieds, &c. M. Mariotte fait voir que ces déterminations sont équivoques dans l'usage que les fonteniers en font : or c'est pour ôter toute ambiguité qu'il appelle pouce d'eau l'eau qui coulant pendant l'espace d'une minute donne 14 pintes mesure de Paris qui pesent deux livres chacune, (il faut que la liqueur passe un peu le bord de la mesure pour qu'elle pese deux livres) : selon cette définition toute ouverture qui donne 14 pintes d'eau en une minute donne aussi un pouce d'eau ; ainsi parce que suivant les expériences du même auteur, l'ouverture d'un pouce circulaire donne 14 pintes en une minute, lorsque la surface de l'eau est une ligne au-dessus de cette ouverture, & qu'une ouverture circulaire de 3 lignes de diametre fournit la même quantité dans le même-tems d'une minute : si elle a son centre 13 pieds au-dessous du niveau, on dira que ces deux eaux coulantes sont d'un pouce : si elles donnent le double, le triple, on dira qu'elles sont de deux, de trois pouces, &c. Si on veut mesurer la quantité d'eau en pieds, pouces cubes, il faut diviser le nombre de pintes par 35, parce que

le pied cube contient 35 pintes ; si on multiplie le nombre de pintes par $49\frac{1}{3}$, on aura des pouces cubiques, parce que la pinte contient 49 pouces $\frac{1}{3}$; si on les multiplie par 63, on aura des pouces cylindriques, parce que la pinte contient 63 pouces cylindriques. Si l'on divise le nombre de pintes par 35, on aura des pieds cubes ; si on le divise par $27\frac{1}{2}$, on aura des pieds cylindriques, parce que le pied cube contient 35 pintes, & le pied cylindrique $27\frac{1}{2}$. Ces mesures supposent que le pied cube contient 35 pintes, & que le rapport du cercle au quarré de son diametre, est égal à celui de 11 à 14.

CHAPITRE II.

De l'écoulement d'une liqueur en tant qu'il a pour principe l'action d'une cause étrangere.

32. ON appelle machines hydrauliques les vaisseaux qui servent à diriger & à conduire les liqueurs & l'eau en particulier ; la pression de l'air a beaucoup de part dans le jeu de plusieurs de ces machines. Nous examinerons 1°. les effets de cette pression dans les siphons, 2°. la vitesse que l'air condensé dans un vaisseau peut donner à une liqueur en la pressant par la force de son ressort, 3°. nous verrons la description des trois especes de pompes qui servent à élever l'eau.

De la vitesse d'une liqueur qui sort d'un siphon.

33. Lorsqu'un tuyau est plein d'une liqueur, l'air la presse également aux deux ouvertures, de sorte que si elle n'étoit point pesante, elle seroit tenue en équilibre par ces deux pressions égales & contraires.

34. *D'où il suit qu'une liqueur ne doit point couler dans un siphon renversé dont les deux branches sont égales, lorsque les colomnes de liqueur qu'elles contiennent n'excedent point en pesanteur la pression qui agit aux orifices* A, C.

[Fig. 52.] (On les suppose assez petits pour que l'air ne s'insinue point dans le tuyau en désunissant les molecules de la liqueur), ainsi qu'on a déja remarqué dans le Livre précedent en parlant des effets de la pression de l'air (50). Si l'endroit B est le plus haut du siphon ou tuyau recourbé CBA, les colomnes CB, CA supposées égales, affoiblissent également la pression de l'air qui agit aux ouvertures C, A; ainsi l'air ne peut surmonter ni l'une ni l'autre de ces colomnes en s'insinuant dans l'une des branches; les colomnes de liqueur ne peuvent point non plus surmonter la pression de l'air, parce que leur poids n'excede point cette pression selon l'hypothèse; donc elles sont en équilibre dans les branches du siphon.

35. Si les branches du siphon étant encores supposées égales, les colomnes qu'elles contiennent excedent le poids de l'air qui presse aux orifices A, C, la liqueur coulera dans les deux branches jusqu'à ce que chaque colomne puisse contrepeser par son poids celui de l'air qui agit au dehors. Cette proposition est évidente après ce qui vient d'être dit. 1° Il est certain que la liqueur coulera. 2°. Elle ne coulera que jusqu'à ce que son poids soit égal à celui de la colomne d'air qui presse au dehors; autrement il faudroit que de deux forces inégales qui agissent directement l'une contre l'autre, la moindre surmontât la plus grande.

36. 3°. *Si les branches* BA, BC, *sont inégales, & que le poids de la colomne la moins longue n'excede pas la pression de l'air qui agit en* C, *la liqueur ne sortira que par la branche la plus longue.* [Fig. 53.] Car 1°. si la colomne BC est égale à la pression de l'air en C, elle sera en équilibre, & pour lors la colomne BA étant plus forte que la pression de l'air en A, coulera jusqu'à ce que son poids égale cette pression, comme il vient d'être dit; 2°. si la colomne BC est plus foible, l'air qui presse en C, consume une partie de sa force à soutenir cette colomne, mais moindre que celle que perd l'air qui résiste en A; donc l'air qui presse en C du bas vers le haut, prévaudra sur la force de l'air qui agit en A; & parce que la colomne BC pese moins

que la colomne d'air qui répond à l'ouverture C, elle montera à mesure que la colomne BA descendra; ainsi si la courte branche trempe dans un vaisseau, le flux sera continuel, puisque l'air qui presse en C fera monter la liqueur du vaisseau dans la branche BC.

37. Nous supposerons pour la Proposition suivante que si la liqueur dont le vaisseau BD [*Fig.* 54.] est plein, sort par l'ouverture A du tuyau EA, elle a à sa sortie une vitesse proportionnée à DC différence des hauteurs EA, FD, c'est-à-dire, que la liqueur sort avec la même vitesse par A que si l'ouverture étoit en C, ce qui ne souffre point de difficulté, car la liqueur qui est dans le tuyau EA est en équilibre avec la liqueur qui est au-dessous de l'horizontale HCA (*Liv. V.* 26.); donc toute la force de la liqueur qui est au-dessus de HCA, est employée à faire jaillir la liqueur par l'ouverture A; ainsi elle a la même vitesse que si elle sortoit par une ouverture faite en C où l'horizontale HCA rencontre les parois du vaisseau.

PROPOSITION IV.

38. *La vitesse avec laquelle la liqueur sort du siphon* ABC [Fig. 55.], *est égale à celle qu'elle acquerroit, si elle tomboit librement d'une hauteur égale à la différence des branches* AB, BC.

On suppose que la branche AB, qui est la plus longue, n'excede pas la hauteur de la colomne avec laquelle l'air peut faire équilibre; ainsi si c'est de l'eau, la branche AB ne doit pas excéder 32 pieds; si c'est du vif-argent, elle ne doit pas excéder 28 pouces.

Concevons que la branche BA est repliée en AM, & le vaisseau EGHF prolongé jusqu'en RN, ensorte que ER, AM soient égales à la hauteur d'une colomne de la liqueur contenue dans le siphon, avec laquelle l'air peut faire équilibre; & au lieu de la pression de l'air, supposons deux colomnes AN, AM de même hauteur, l'une qui presse sur la surface EF, & l'autre AM qui presse à l'ouverture A: il est certain que la liqueur sortiroit par l'ouver-

ture M avec la viteſſe qu'elle a en ſortant par l'ouverture A, puiſque la réſiſtance que la colomne AM feroit à l'ouverture A, eſt préciſément égale à celle de l'air : or ſi la liqueur ſortoit par l'ouverture M, ſa viteſſe ſeroit la même que ſi elle ſortoit en I à la profondeur NI, qui eſt la différ. des hauteurs FN, LM (37) ; de plus FA différ. des branches, eſt égale à IN, puiſque FN=AM & FI=LM ; donc la viteſſe que la liqueur a en ſortant par l'ouverture A, eſt la même que ſi elle tomboit librement de la hauteur FA, différence des braches CB, BA.

En effet il eſt viſible que la colomne d'air qui preſſe à l'ouverture A, où la colomne AM qui la repréſente conſume la partie AO de ſon poids à réſiſter à la colomne AB, & que la partie BI eſt en équilibre avec la partie OM ; il reſte donc que la force de la portion IR ou IN de la colomne EN ſoit toute employée à produire la viteſſe de la liqueur; donc cette viteſſe eſt la même que ſi la liqueur ſortoit d'un réſervoir qui auroit pour hauteur IN ou FA, différence des branches, & par conſéquent égale à celle qu'elle acquerroit en tombant de la hauteur FA. (19.20.)

39. *Corollaires.* 1°. Si la branche BC eſt horizontale, & la branche BA de 28 pouces de haut, du vif-argent ſortiroit par A avec la viteſſe qu'il acquerroit par une hauteur de 28 pouces; ſi la branche BA a 32 pieds, de l'eau couleroit par l'ouverture A avec une viteſſe égale à celle qu'elle acquerroit par la hauteur de 32 pieds.

40. 2°. Lorſque la branche BC eſt horizontale & que la branche BA a la hauteur de la colomne que l'air peut ſoutenir par ſon poids, la viteſſe que la liqueur a en ſortant par l'ouverture A, eſt la plus grande : car pour lors toute la force de la colomne EN eſt employée à produire la viteſſe de la liqueur qui ſort par A; elle ne peut donc pas être plus grande.

41. Quand même la branche BA ſeroit plus haute, l'air qui preſſe ſur le vaiſſeau en C, ne donneroit pas pour cela à la liqueur une plus grande viteſſe. Car 1°. ſi la liqueur rem-

plit exactement le siphon dans toute sa longueur, elle a partout la même vitesse comme il a été prouvé dans les *principes*, & pour lors cette vitesse n'est pas plus grande que celle que la pression de l'air en C peut communiquer; si la liqueur ne remplit pas exactement le tuyau, l'air s'insinue au dedans; & s'il parvient jusqu'en B, il y retarde la vitesse du flux, il peut même arriver que la liqueur cesse de couler. Si elle ne remplit exactement qu'une partie du tuyau, elle coule uniformément dans cette partie, & elle n'y a pas une vitesse plus grande que celle qu'elle reçoit en C; ainsi le reste de la branche BA devient inutile; & si la liqueur y est accélerée, elle l'est comme dans l'air lorsqu'elle est sortie du tuyau, sans que la quantité de l'écoulement en soit pour cela plus grande; il en est de même si les deux branches trempent dans deux vaisseaux.

42. Il suit de tout ce qui vient d'être dit que si la différence des branches BC, BA est connue, & le diametre de l'ouverture du siphon, on pourra déterminer la quantité de l'écoulement par les regles du Chapitre précedent; mais il y a plusieurs causes qui peuvent diminuer ce produit: quelques-unes sont les mêmes que celles qu'on a remarquées en parlant d'une liqueur qui sort d'un réservoir par une ouverture horizontale.

De la vitesse que l'air condensé peut donner à une liqueur.

43. L'air se condense dans la proportion des poids ou des forces qui le compriment: il se condense aussi dans la raison réciproque des espaces qu'il occupe (*Liv.V.*82.83): or l'air presse avec une force égale à celle qui le comprime; par conséquent si le degré de condensation est connu, on connoîtra aussi la vitesse qu'il peut donner à une liqueur qu'il presse par la force de son ressort. Car la force du ressort de l'air est comparable au poids d'une colomne de la liqueur qui le tiendroit dans ce degré de compression; il est certain que la liqueur qui seroit chargée d'un tel poids, jailliroit avec

une vitesse par laquelle elle pourroit monter au haut de cette colomne (19) : de plus nous avons vu dans le Livre précedent comment on peut comprimer l'air dans un rapport donné ; il est donc aisé de déterminer la vitesse que l'air peut donner à une liqueur qu'il presse par son ressort.

PROBLÊME V.

44. *Trouver le degré de condensation qu'il faut donner à l'air, pour que la force du ressort pousse une liqueur à une hauteur donnée.*

On suppose que la hauteur donnée est de 50 pieds. 1°. Il faut trouver par l'expérience la hauteur de la colomne que l'air naturel peut soutenir par son poids, ou par le degré de condensation qu'il reçoit de ce poids; cette hauteur est ordinairement de 32 pieds pour l'eau au bord de la mer, & de 28 pouces pour le vif-argent. 2°. Supposons que ce soit de l'eau qu'il faille pousser en l'air, il faut ajouter 32 à 50 pour avoir la somme 82, & faire la proportion $32 . 82 :: 1 . x = \frac{82}{32}$; c'est-à-dire, que si on condense l'air dans la proportion de $\frac{82}{32}$ à 1 l'eau j'aillira à la hauteur de 50 pieds. Car puisque l'air se condense dans la proportion des poids, si une colomne d'eau de 32 pieds ou ce qui revient au même si le propre poids de l'air produit une condensation exprimée par 1, une colomne d'eau de 82 pieds le comprimeroit davantage à proportion, & dans cet état de compression l'air feroit équilibre avec une colomne d'eau de 82 pieds; donc dans un lieu vuide d'air ou dans un milieu non résistant il feroit j'aillir l'eau à 82 pieds ; mais parce que l'air extérieur résiste avec une force égale au poids d'une colomne de 32 pieds, il s'ensuit que la force de l'air condensé est diminuée d'autant, & que la force qui fait j'aillir l'eau est seulement égale au poids d'une colomne d'eau de 50 pieds; donc elle j'aillira à cette hauteur.

45. Si la condensation de l'air étant donnée, on demande à quelle hauteur il peut pousser l'eau par la force de son ressort ; s'il est, par exemple, trois fois plus condensé que dans son état naturel, on aura cette hauteur, si de 96

pieds, longueur de la colomne d'eau qui donneroit à l'air un degré de condensation trois fois plus grand, on en retranche 32 qui représentent la résistance de l'air extérieur, le reste 64 sera la hauteur du jet.

DES POMPES.

46. Les Pompes sont de long tuyaux dans lesquels l'eau monte à une certaine hauteur par la pression de l'air extérieur ou de quelque autre cause. Dans toutes les pompes il faut distinguer trois parties principales; le tuyau, le piston, & les soupapes: dans le tuyau il y a deux parties remarquables, celle où le piston joue en allant & venant, on l'appelle corps de pompe ou barillet; l'autre partie sert à contenir l'eau, & à la conduire à la hauteur destinée.

47. *Les pompes sont de trois sortes, aspirantes, foulantes, aspirantes & foulantes en même-tems.* La pompe aspirante est celle où l'eau monte par la seule pression de l'air extérieur. Si le tuyau AB [*Fig.* 56.] trempe dans l'eau par son extrémité inférieure C, qu'on leve le piston EF depuis le bas jusqu'à la hauteur de 32 pieds, de maniere qu'il ne reste point d'air dans le tuyau entre l'eau qui y monte, & le piston, elle s'élevera à cette hauteur; car l'air extérieur en pressant sur la surface de l'eau presse aussi celle qui répond à l'ouverture C, & l'oblige de monter dans le tuyau où elle ne trouve aucune résistance; & parce que la pression de l'air extérieur ne peut faire équilibre qu'avec une colomne d'eau de 32 pieds, il arrive que si on leve le piston à cette hauteur elle y monte & s'y arrête, quoiqu'on leve davantage le piston.

48. Lorsqu'on leve le piston EF, la soupape G s'ouvre & l'eau entre, lorsqu'on le baisse la soupape G se ferme, & la soupape H s'ouvre; pour lors l'eau passe dans la partie supérieure du tuyau; & lorsqu'on leve une seconde fois le piston, l'eau qui a passé dans la partie supérieure du tuyau en sort.

49. Aux pompes foulantes le corps de pompe AB [*Fig.* 57.] trempe dans l'eau; lorsqu'on leve le piston, l'eau qui

presse de bas en-haut à l'ouverture C, fait lever la soupape G, & entre dans le corps de pompe, parce qu'elle tend à se mettre de niveau, si on abbaisse ensuite le piston, la soupape G se ferme; & l'eau étant ainsi foulée est contrainte de passer dans le tuyau montant NM; si on leve de nouveau le piston, le poids de l'eau du tuyau NM fait fermer la soupape H, ce qui l'empêche de descendre; pour lors celle qui presse à l'ouverture C, entre comme la premiere fois dans le corps de pompe, d'où elle passe dans le tuyau montant lorsque le piston en descendant la foule.

50. Aux pompes aspirantes & foulantes, l'eau entre dabord dans le tuyau AB [*Fig.*58.] par aspiration, c'est-à-dire, par la seule pression de l'air, ce qui se fait en levant le piston; si après cette premiere opération on l'abbaisse, la soupape G se ferme, & la force de la pression fait monter l'eau dans le tuyau NM, d'où elle ne peut pas descendre, parce que la soupape H qui s'ouvre pour la laisser entrer se ferme lorsqu'elle fait effort pour descendre.

CHAPITRE III.

De la percussion ou choc des fluides.

51. LES fluides choquent les corps fermes, ou les corps fermes, les fluides; lorsqu'un fluide choque un corps ferme, il le met en mouvement si rien ne détruit l'impression qu'il fait par le choc; mais si un corps ferme choque un fluide, il perd de sa vitesse, & il est retardé. Ainsi les fluides résistent aux corps en mouvement.

Nous allons voir 1°. quelle est la loi du choc des fluides, 2°. la résistance qu'ils font aux corps en mouvement.

De la loi du choc des fluides.

52. Un corps ferme choque, pour ainsi dire, en un instant par sa masse, parce que ses parties étant liées, & les unes ne pouvant avancer sans les autres, elles font ef-

fort ensemble & en même-tems : la maniere de choquer des fluides est différente, parce qu'ils se divisent à la plus légere impulsion, les premieres parties choquent d'abord, elles se retirent ensuite faisant place à celles qui suivent. Un corps ferme qui est choqué par un courant est en repos : ou il est déja en mouvement ; dans les Propositions suivantes nous supposerons que les corps choqués sont en repos, on peut voir dans les *Principes* ce qui a été dit du choc des surfaces qui sont mûes dans un courant.

53. Nous concevrons les fluides comme composés de petits globules qui sont mûs à la suite les uns des autres ; chacun en particulier choque comme feroit un corps ferme : un courant peut choquer directement, ou obliquement ; le choc direct est le plus grand de tous, & le choc oblique fait une impression d'autant plus grande qu'il approche d'être direct.

PROPOSITION V.

54. *Si deux surfaces égales* DC, *dc* [Fig. 59, 60.] *sont choquées directement étant en repos*, 1°. *elles en reçoivent des impressians qui sont entr'elles comme les quarrés des vitesses.* 2°. *Si les vitesses sont égales, les impressions causées sont comme les surfaces.* 3°. *Si les vitesses & les surfaces sont inégales, les impressions causées sont comme les produits des surfaces, & des quarrés des vitesses.*

I. Partie. Dans les deux courans ne considérons que les filets AF, *af* ; si le courant ABF est mû, par exemple, avec une vitesse triple, il se détache trois globules du filet AF, tandis qu'il ne s'en détache qu'un du filet *af*. Cela posé, si l'on multiplie les masses des trois globules par leur vitesse triple, la force de chacun en particulier sera triple de celle d'un globule du filet *af* (*Liv. I.* 46), & la force des trois globules ensemble neuf fois plus grande que la force d'un globule du filet *af* ; donc les forces avec lesquelles les filets AF, *af* choquent les surfaces DC, *dc*, sont entr'elles comme les quarrés des vitesses 3 & 1 ; d'ailleurs les courans contiennent le même nombre de filets, puisque

les surfaces sont égales ; donc les impressions totales sont entr'elles comme celles des filets AF, *af*, & par conséquent entr'elles comme les quarrés des vitesses.

II. Partie. Puisque les filets AF, *af* sont mûs avec la même vitesse, ils choquent les surfaces DC, *dc* avec des forces égales ; il reste donc que les forces totales soient entr'elles comme les nombres ou quantités des filets qui choquent en même-tems : or ces quantités ou nombres sont comme les surfaces, une surface double est rencontrée par un nombre de filets deux fois plus grand. Donc les forces avec lesquelles les courans choquent les surfaces DC, *dc*, sont comme ces surfaces.

III. Partie. Que les vitesses des courans soient entr'elles comme 3 & 2, & les surfaces DC, *dc* entr'elles comme 5, & 7. Cela posé, supposons d'abord deux surfaces égales à 1, les forces avec lesquelles elles sont choquées sont entr'elles comme 9 & 4 quarrés des vitesses 3 & 2 ; mais puisque les surfaces DC, *dc* sont l'une cinq fois, & l'autre sept fois plus grandes que les surfaces égales à 1, elles sont choquées avec des forces qui sont aussi l'une 5 & l'autre 7 fois plus grandes ; donc pour avoir les forces avec lesquelles les surfaces DC, *dc* sont choquées, il faut multiplier les impressions 9 & 4 des surfaces égales à 1, l'une par 5, & l'autre par 7 ; par conséquent les forces avec lesquelles les surfaces DC, *dc* sont choquées, sont entr'elles comme les produits des quarrés des vitesses 3, 2, & des surfaces 5, 7.

PROPOSITION VI.

55. *Si deux surfaces égales* DE, DC [Fig. 61.] *sont exposées à un même courant ; l'une, sçavoir* DE *directement ; & l'autre* DC *obliquement, la force du choc direct est à la force du choc oblique, comme le quarré du sinus total est au quarré du sinus de l'angle* BDC, *qui est l'incidence oblique.*

Tous les filets du courant étant supposés paralleles entre eux, l'angle BDC est égal à son alterne DCF (29. *Géom.*) ; donc si on prend DC, ou DE pour sinus total ou pour

rayon, DF eſt le ſinus de l'angle DCF ou de ſon égal BDC (21. *Géom.*) : or DE meſure le nombre de filets qui choquent directement, & DF le nombre de ceux qui choquent obliquement; d'où il ſuit que ſi les filets qui rencontrent la ſurface DC, la choquoient avec autant de force que ceux qui rencontrent la ſurface DE, les forces avec leſquelles le courant choqueroit ces deux ſurfaces, ſeroient entre elles comme DE & DF, c. à d. comme le ſinus total eſt au ſinus de l'ang. DCF; mais les filets qui rencontrent la ſurface DE la choquent avec plus de force que ceux qui rencontrent la ſurface DC, & laforce de chacun dans le choc direct eſt à la force dans le choc oblique, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle d'incidence (*Liv. III.* 35): la force du choc direct eſt donc plus grande à deux égards, 1°. à raiſon du plus grand nombre de filets, c'eſt-à-dire, dans la raiſon du ſinus total au ſinus de l'angle d'incidence; 2°. à raiſon de la force avec laquelle chacun choque, c'eſt-à-dire, dans la raiſon du ſinus total au ſinus de l'angle d'incidence; d'où l'on voit que ſi le ſinus total eſt double, il y aura deux fois plus de filets, & la force du choc direct ſera double à raiſon du nombre; mais cette même force ſera encore double, parce que chaque filet frappe avec une force double; donc la force totale du choc direct eſt quadruple de la force du choc oblique; donc la premiere de ces force eſt à la ſeconde, comme le quarré du ſinus total eſt au quarré du ſinus de l'angle d'incidence.

56. *Coroll.* 1°. Si les ſurfaces ſont inégales, les forces avec leſquelles elles ſont choquées, ſont entr'elles comme les produits des quarrés du ſinus total, & de l'angle d'incidence multipliés par les ſurfaces.

57. 2°. Si deux ſurfaces inégales ſont expoſées obliquement à un même courant, les forces qui choquent ſont entre elles comme les quarrés des ſinus des angles d'incidence multipliés par les ſurfaces.

De la résistance que les fluides font aux corps en mouvement.

58. Lorsqu'un corps est mû dans un fluide, il choque les parties qui se trouvent sur son passage & leur communique de son mouvement, la vitesse se rallentit, & il entre bien-tôt dans le repos; d'où il suit que la résistance d'un milieu est proportionnelle au mouvement qu'il ôte à chaque instant au mobile; elle est aussi égale au produit de la quantité de fluide qui est remuée, & de la vitesse que le mobile lui communique.

59. Lorsqu'un corps est mû dans un milieu résistant d'une vitesse uniforme, il faut qu'il y ait une force qui lui étant continuellement appliquée surmonte la résistance du fluide, sans quoi il perdroit peu à peu son mouvement; or cette force est constamment la même, puisque le mobile parcourant dans le milieu qui résiste, des espaces égaux en tems égaux, trouve nécessairement la même résistance.

PROPOSITION VII.

60. *Les résistances qu'un même corps trouve dans un milieu sont proportionnelles aux quarrés des vitesses.*

Supposons au mobile deux vitesses, l'une triple de l'autre, il est certain qu'avec la vitesse triple il parcourt un espace triple, ce qu'il ne peut faire à moins qu'il ne déplace un volume de fluide trois fois plus grand; mais de plus ce volume reçoit une vitesse trois fois plus grande; car il faut qu'il parcoure dans le tems qu'il est déplacé le même espace que le mobile qui le pousse devant soi: donc lorsque le mobile est mû avec une vitesse triple, il déplace une masse trois fois plus grande en lui imprimant une vitesse aussi trois fois plus grande. Cela posé, les résistances que le mobile trouve, sont entr'elles comme les quantités de mouvement qu'il communique au mobile; or ces mouvemens sont entr'eux comme les produits des masses 3 & 1, & des vitesses 3 & 1 (*Liv. I.* 33), c'est-à-dire, comme 9 & 1, qui sont les quarrés des vitesses 3 & 1; donc les résistances que le mobile trouve, sont aussi entr'elles comme les quarrés des vitesses.

61. On peut ajouter à cette preuve, que la force du choc est la même, soit que l'on suppose que c'est le corps ferme qui va choquer le fluide, ou que c'est le fluide qui choque le corps ferme en repos, pourvû que la vitesse soit la même dans l'une & l'autre supposition (*Liv. III.* 33) : or la force avec laquelle une surface ou un corps est choqué par un fluide, est proportionnelle au quarré de la vitesse (54) ; donc la force avec laquelle le corps ferme choque le fluide, & conséquemment la résistance qu'il trouve, est aussi proportionnelle au quarré de la vitesse.

62. *Corollaires.* 1°. *Si deux spheres sont mûes dans un fluide ou milieu résistant avec des vitesses inégales, elles trouvent des résistances qui sont entr'elles comme les quarrés des vitesses multipliés par les quarrés des diametres.* Car les résistances sont comme les quarrés des vitesses multipliés par les surfaces : or les surfaces sont comme les quarrés des diametres ; donc les résistances sont entr'elles comme les quarrés des vitesses multipliés par les quarrés des diametres.

63. D'où il suit que si les vitesses sont égales, les résistances sont comme les quarrés des diametres : ainsi les diametres étant 3 & 1, les résistances sont entr'elles comme 9 & 1 : or les quantités de mouvement sont entr'elles comme les masses, puisque les vitesses sont égales (*L. I.* 30) ; d'ailleurs les masses sont comme les cubes des diametres, c'est-à-dire, comme 27 à 1 ; donc les quantités de mouvement sont aussi entr'elles comme les cubes des diametres, ou comme 27 à 1 : cela étant, si les résistances étoient entr'elles comme les quantités de mouvement des mobiles, les deux spheres perdroient leurs vitesses en même-tems, lorsque l'une auroit perdu un sixiéme, un tiers, la moitié de son mouvement, l'autre sphere auroit perdu des parties semblables du sien : ainsi l'on pourroit dire que les deux spheres trouveroient des résistances égales, en prenant la résistance en tant qu'elle retarde également la même vitesse ; mais puisque les résistances dans l'hypothèse présente sont comme les quarrés des diametres, & que d'ailleurs le rapport de ces quarrés est moindre que celui des solidités, il s'ensuit

que

que le rapport des résistances est moindre que celui des solidités ou des quantités de mouvement, ou des forces avec lesquelles les spheres sont mûes ; par conséquent la grande sphere sera plus long-tems à perdre sa vitesse, que la moindre ; ainsi l'on peut dire que la petite sphere trouve une plus grande résistance que la grande, en considérant la résistance non en elle-même & en tant qu'elle détruit une certaine quantité de mouvement, mais en tant qu'elle retarde la vitesse.

74. *Remarque.* Lorsque les vitesses sont égales, les résistances ne sont pas toujours proportionnelles aux surfaces, il faut de plus avoir égard à la direction du mobile : supposons qu'une sphere & un cylindre dont la base est égale à un grand cercle de la sphere sont mûs d'une égale vitesse dans un milieu qui résiste, le cylindre suivant une direction parallele à sa longueur, ou perpendiculaire à sa base, je dis que la résistance de la sphere est moindre que celle du cylindre. 1°. Le cylindre ne trouve de la résistance que dans sa base, puisque sa direction étant parallele à sa longueur, le fluide glisse le long de sa surface convexe sans la choquer ; ainsi le cylindre ne choque le fluide que par sa base antérieure, & la sphere par la moitié de sa surface, laquelle est double de la base du cylindre : or 2°. quoiqu'elle soit double, sa résistance est moindre ; car il est aisé d'imaginer que la sphere ne rencontre pas une plus grande quantité de fluide que le cylindre, ces deux corps font dans le milieu des ouvertures circulaires de même diametre, ainsi ils rencontrent en même-tems avec la même vitesse des quantités égales de matiere ; mais le cylindre choque directement celle qu'il rencontre, au lieu que les différentes parties de la surface sphérique étant mûes obliquement à l'égard du fluide, le choquent avec moins de force ; donc la résistance totale de la sphere est moindre que celle de la base du cylindre, quoique la surface sphérique soit double de cette base. On a démontré dans les *Principes* que la résistance de la sphere n'est que la moitié de celle de la base du cylindre.

PROPOSITION VIII.

75. *Un corps qui descend par l'effort de la pesanteur dans un milieu résistant, comme dans l'air, ou dans l'eau, n'accélere pas toujours sa vitesse, mais il y a un terme où il commence à être mû d'un mouvement uniforme.*

1°. Lorsqu'un corps descend dans l'air ou dans l'eau, sa vitesse est d'abord accélérée ; car on suppose que la pesanteur spécifique du solide est plus grande que celle du fluide; par conséquent la force qui est appliquée au solide est plus grande que la résistance du milieu ; il est donc nécessaire que la vitesse du solide soit d'abord accélérée : mais à mesure que cette vitesse augmente, la résistance du milieu augmente aussi. Cela posé, lorsque deux quantités sont inégales, & que la moindre augmente continuellement, l'autre demeurant la même, il y a un terme où la moindre devient enfin égale à la grande; or à mesure que la vitesse du mobile s'accroît, la résistance du milieu augmente, & la pesanteur qui est la cause de l'accélération demeure la même ; il y a donc un terme où la résistance du fluide contrebalance la pesanteur du mobile, qui cesse pour lors d'être accéléré.

2°. Lorsque le mobile pesant n'est plus accéléré, il est mû dans le milieu qui résiste uniformément avec la vitesse acquise. Car au moment que le mobile cesse d'être accéléré, la pesanteur qui le pousse est en équilibre avec la résistance du milieu. 1°. Cette résistance n'est pas plus grande que l'effort de la pesanteur, autrement le mobile n'auroit point été accéléré jusqu'au moment supposé, & sa vitesse seroit moindre. 2°. Cette résistance n'est pas moindre que la pesanteur du solide, autrement la vitesse acquise augmenteroit encore : l'effort de la pesanteur & la résistance du milieu sont donc en équilibre, & l'une contrebalance l'autre : par-là ces forces deviennent de nul effet. Donc le mobile est mû d'un mouvement uniforme avec la vitesse acquise.

M. Mariotte appelle vitesse *complette*, la vitesse uniforme avec laquelle un corps pesant est mû dans l'air.

Fin des six Livres.

RENVOIS.

Ier. *Pour la page 24, art. 62. Nous avons supposé qu'un corps* K *de figure sphérique qui est tiré ou poussé à la fois par deux puissances* M, N *dont les directions* CA, CB [Fig. 1, pl. 6], *concourent au centre* C *du globe est mû sans qu'il tourne, en sorte que toutes ses parties tracent des lignes paralleles entr'elles, & à celle que le centre décrit.* Voici la preuve qu'on en peut donner. Si le corps K n'étoit poussé que par la puissance M, toutes ses parties seroient mûes parallelement à CA, qui seroit le chemin du centre; car puisque la direction CA passe par le centre, la force de la puissance M est appliquée de la même maniere aux parties de part & d'autre du centre C, qui en étant également éloignées sont semblablement situées à l'égard de la direction CA; ainsi ces parties deux à deux situées de part & d'autre du centre étant poussées à la fois sont déterminées à suivre des directions semblablement situées par rapport à celle du centre, & par conséquent paralleles à cette même direction, puisqu'elles reçoivent leur impulsion de la force appliquée au centre: par une raison semblable si le corps K n'étoit poussé que par la puissance N, toutes les parties seroient mûes parallelement à la direction CB, qui seroit celle du centre: donc ni l'une ni l'autre des puissances M, N agissant séparément sur le corps K, ne le détermine point à tourner; d'ailleurs leurs efforts se composent nécessairement en un seul qui passe par le centre, puisque les directions CA, CB y concourent, & que le centre ne peut aller que par un chemin; donc le corps K est tiré ou poussé à la fois par les deux puissances M, N comme s'il ne l'étoit que par une seule, dont la direction passeroit par le centre C; donc conformément à ce qui vient d'être dit toutes les parties du corps K sont déterminées à suivre des directions paralleles à CD, que l'on suppose être celle du centre C.

2[e]. *Pour la page 39, après l'art. 97.* On démontre une Propoſition touchant les forces centrales qui peut être d'uſage dans l'Aſtronomie-Phyſique, & que l'on peut placer après l'article 97. La voici. *Si les viteſſes des corps* K, Z *qui décrivent deux circonférences, ſont entr'elles réciproquement comme les racines quarrées des diametres ou des circonférences décrites, les forces centrales ſont entr'elles réciproquement comme les quarrés des diametres.* Suppoſons que la viteſſe du corps K ſoit à celle du corps Z comme 3 à 2, les racines quarrées des diametres des circonférences qu'ils décrivent, ſont entr'elles ſelon l'hypothèſe comme 2 à 3, c'eſt-à-dire, réciproquement comme les viteſſes & les quarrés 4 & 9 de ces deux nombres repréſentent les diametres des circonférences décrites. Cela poſé, ſi on diviſe les quarrés 9 & 4 des viteſſes 3 & 2 par les diametres 4 & 9, les quotiens $\frac{9}{4}$ & $\frac{4}{9}$ repréſentent les forces centrales des corps K, Z (*pag.* 39, *art.* 97). Si l'on multiplie ces deux fractions d'abord par 4, dénominateur de la premiere, ce qu'on fait en ôtant le dénominateur 4 de la premiere $\frac{9}{4}$, & en multipliant le numérateur 4 de la ſeconde fraction $\frac{4}{9}$ par le même dénominateur 4; qu'on multiplie enſuite l'une & l'autre par 9 dénominateur de la ſeconde, l'on aura les produits 9×9 & 4×4 qui ſont dans la raiſon des fractions $\frac{9}{4}$ & $\frac{4}{9}$; donc les forces centrales des corps K, Z qui ſont entr'elles comme ces deux fractions ſont entr'elles comme les nombres 9×9 & 4×4: or ces nombres ſont les quarrés des diametres 4 & 9 pris en raiſon inverſe. Donc les forces centrales des corps K, Z ſont entre elles, &c.

3[e]. *Pour la page 72, après l'art. 72.* Le Problême dont nous allons donner la ſolution contient, l'application des principes expliqués dans le troiſiéme Chapitre du ſecond Livre, à la pratique de l'art de jetter les corps d'une grandeur conſidérable. On ſe ſervoit anciennement pour cet effet d'une machine appellée *Baliſte*, avec laquelle on lançoit de groſſes pierres: depuis l'invention du Canon &

du Mortier cette machine & les autres instrumens de guerre des Anciens sont devenus inutiles, & ont été mis en oubli : ainsi tout l'art de jetter de grands corps consiste à présent à sçavoir faire usage du canon & du mortier pour faire tomber un boulet ou une bombe en un lieu proposé. Nous ne donnerons point ici la description de ces deux machines, ni la maniere de les charger, ce détail appartient à un Traité d'Artillerie : nous nous contenterons d'expliquer comment les Canoniers & les Bombardiers doivent les pointer ou les diriger pour que le boulet & la bombe qui sont poussés par la force de la poudre enflammée, atteignent l'endroit proposé sans s'arrêter en-deçà ou sans aller en-delà.

PROBLÊME V.

1°. *Faire tomber une bombe sur l'endroit qu'on voudra, par exemple, au point* F [Fig. 2, 3, 4.]

Le Problême peut être résolu géométriquement & par le calcul algébrique ou numérique, en opérant sur les triangles de la figure : on peut aussi l'exécuter avec un simple instrument. Il est évident que la solution cherchée consiste à trouver l'inclinaison qu'il faut donner au mortier, c'est-à-dire, [*Fig.* 2, 3, 4.] l'angle MAF ou NAF que la ligne de projection AM ou AN doit faire avec le plan AF, qui passe par le point de départ A & le lieu proposé F, afin que la bombe étant poussée suivant AM ou AN aille rencontrer le point F.

Construction géométrique du Problême.

Le lieu F peut être sur un plan horizontal, ou sur un plan incliné au-dessus ou au-dessous de l'horizon. La résolution est la même pour tous les cas : 1°. Il faut trouver par le cinquiéme Problême du second Livre page 71 la force de la charge de poudre qui chasse la bombe, c'est-à-dire, trouver la hauteur d'où la bombe venant à tomber librement par son poids, acquerroit la vitesse que cette charge lui imprime, & bien remarquer cette même charge ; supposons

que cette hauteur soit représentée par le quart de la ligne AG, cette ligne AG sera celle que nous avons nommée *ligne d'égalité* (*pag*. 69), elle est perpendiculaire sur l'horizontale AB. 2°. Il faut mener AE perpendiculaire au plan AR qui passe par le lieu A de départ & le lieu proposé F, diviser la ligne AG en deux parties égales au point D, duquel il faut élever sur AG la perpendicul. DC qui rencontre la ligne AE au point C, duquel, comme centre, & de l'intervalle CA il faut décrire une circonférence qui rencontrera aux points M, N la verticale FNM qui passe par le lieu proposé F. 3°. Il faut mener AM, AN qui seront les lignes de projection, en sorte que si l'on donne au mortier la charge ci-dessus remarquée, & l'inclinaison AM ou AN, la bombe étant poussée par la force de cette charge, ira rencontrer le plan AR au point proposé F.

Démonst. Du point G soient menées les lignes GM, GN. Nous aurons quatre triangles qui deux à deux sont semblables, AGM est semblable à AFM, & AGN semblable à AFN. Car les lignes AG, FM étant paralleles par la construction donnent les angles alternes GAM, AMF égaux, de plus l'angle inscrit AGM a pour mesure la moitié de l'arc ANM; & parce que AR est perpendiculaire au rayon AC, elle est tangente, & l'angle MAF est un angle du segment qui a aussi pour mesure la moitié du même arc ANM; donc les triangles AGM, AMF, qui ont deux angles égaux, sont semblables, & les angles AMG, AFM sont égaux. Pareillement les triangles AGN, AFN sont semblables; car les angles AGN, FAN étant l'un angle inscrit, & l'autre angle du segment, ont chacun pour mesure la moitié de l'arc AN, de plus l'angle GAN a pour mesure la moitié de l'arc GMN; & l'angle ANF qui est formé par la corde AN & le prolongement NF de la corde MN a pour mesure la moitié de la somme des arcs AN, NM, qui pris ensemble sont égaux à l'arc GMN; car les arcs AN, GM dont les moitiés mesurent les angles égaux GAM, AMN sont aussi égaux; donc les arcs GMN, ANM sont égaux aussi-bien que les angles GAN, ANF, qui sont mesurés par les moitiés de ces arcs; donc les triangles GAN, AFN

qui ont deux angles égaux, sont semblables; & ils ont les angles ANG, AFN égaux; donc les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels; donc les triangles AGM, AFM donnent FM. AM : : AM. AG, & les triang. AGN, AFN donnent FN. AN : : AN. AG, c'est-à-dire, que les lignes AM, AN sont moyennes proportionnelles entre AG & les lignes MF, NF.

Cela posé, si la bombe étant poussée suivant une direction AM ou AN avec une force que nous nommerons Z, capable de la porter en F, la ligne AM ou AN seroit la ligne de projection, & la ligne MF, ou NF la ligne de chute respective; de plus la force du jet suivant AM ou AN, c'est-à-dire Z, seroit égale à celle que la bombe acquerroit en tombant d'une hauteur dont le quadruple seroit troisiéme proportionnelle à la ligne de chute respective MF ou NF, & à la ligne de projection AM ou AN (*Liv. II. 68, 69*): or nous venons de voir que la ligne AG est troisiéme proportionnelle aux lignes MF, AM, ou NF, AN. Donc la force Z avec laquelle on suppose que la bombe est poussée suivant AM ou AN, ne differe point de la force supposée dans le Problême, puisque ces deux forces sont égales l'une & l'autre à celle qu'elle acquerroit en tombant d'une hauteur égale au quart de AG. Donc si la bombe est encore poussée suivant AM, ou AN avec la même force elle ira encore rencontrer le point F; donc la ligne AM ou AN que le Problême fait trouver est l'inclinaison qu'il faut donner au mortier, ou la ligne suivant laquelle il faut diriger le jet.

M. Blondel dans l'*Art de jetter les Bombes* imprimé à la Haye en 1685, pag. 338, attribue à M. Cassini cette résolution Géométrique.

II. Remarque. Non-seulement lorsque le projectile s'arrête sur l'horizontale qui passe par le lieu A du départ, il y a deux inclinaisons, ou deux directions suivant lesquelles étant poussé avec la même force, il va rencontrer le plan horizontal au même point (*Liv. II. 67*); mais encore lorsqu'il doit tomber sur un lieu qui est au-dessus ou au-dessous

du plan horizontal AB, il y a aussi deux lignes de projection AM, AN pour le faire arriver au même but; & parce que ces lignes sont moyennes proportionnelles entre la ligne d'égalité AG & les lignes de chute respective MF, NF, il est visible qu'à quelque point de la verticale MF qu'on tire des lignes du point A, elles ne pourront avoir cette condition: ainsi il n'y a que les deux lignes de projection AM, AN pour faire tomber la bombe au point F.

3°. Si l'on conçoit que la verticale FM, qui est parallele à AG, s'approche ou s'éloigne de AG, les points N, M où elle rencontrera la circonférence ANMG détermineront la position ou l'inclinaison des lignes de projection suivant lesquelles le mortier étant dirigé, la bombe ira rencontrer le point F où la verticale FM coupe le plan ARF; car toutes ces lignes AM, AN seront moyennes proportionnelles entre AG & les lignes de chute respective correspondantes. Il est évident que les arcs GM, AN compris entre les paralleles AG, MN sont égaux, qu'ainsi les points M, N sont également éloignés des points G, A: or plus la verticale MF s'éloigne de AG, plus les points M, N s'approchent l'un de l'autre, de même que les lignes de projection AM, AN; enfin lorsque MF touche la circonférence au point P de la perpendiculaire DCP, pour lors les deux directions AM, AN se réunissent en une qui est AP, & le point R où la tangente RP rencontre le plan AFR, est l'endroit où la bombe tombera étant poussée suivant AP.

3°. Si on veut la faire tomber en un endroit S plus éloigné du point A que l'endroit R, la chose sera impossible, la force de la charge de poudre supposée dans le Problême n'étant pas assez grande pour produire l'effet demandé, suivant quelque ligne AO que la projection se fasse: car à cause des triang. semblables AGP, AOS, l'on a AG. AP:: AO. OS, l'on aura aussi AG. AN:: AO. OS, d'où l'on voit que les lignes de projection AP, AN étant continuées hors du cercle, cessent d'être moyennes proportionnelles entre les lignes d'égalité & de chute respective, il faudroit pour conserver cette proportion que AP, AN

fussent égales à AO ; mais pour lors il seroit nécessaire que l'antécédent AG, qui est la ligne d'égalité, augmentât dans la même raison que son conséquent AP ou AN ; il faudroit donc que la force de la bombe, représentée par le quart de la ligne d'égalité AG augmentât aussi ; donc la force supposée dans le Problême est trop petite pour pousser la bombe jusqu'au point S.

Résolution par le calcul Algébrique.

4°. Nous supposerons que les trois côtés du triangle rectangle ABF sont connus ; car on connoît l'angle droit B, l'angle BAF par l'observation, & l'on peut mesurer actuellement ou par la Géométrie pratique le côté AF ; cela étant, on connoîtra les deux autres côtés par les regles ordinaires. Pour mettre le Problême en équation, il faut trouver deux valeurs de la ligne de projection AN ou AM ; l'une par le triangle rectangle ABN ou ABM, l'autre par la propriété démontrée (*Liv. II.* 69).

Voici les noms des lignes. § Le triangle rectang. ABN ou ABM donne $\overline{AN}^2 = x^2 + aa$, † & la propriété dont il s'agit ici donne l'autre valeur $\overline{AN}^2$ § $= AG \times FN = cx$, *Fig.* 2e. $= cx - bc$ *Fig.* 3. $= cx + bc$ *Fig.* 4.

§ $AB = a$
$BF = b$
$AG = c$
BN ou $BM = x$
$FN = x$ *Fig.* 2.
$FN = x - b$. *Fig.* 3.
$FN = x + b$. *Fig.* 4.

† $\overline{AN}^2 = xx + aa$

§ $\overline{AN}^2 = cx$ *Fig.* 2.
$\overline{AN}^2 = cx - bc$ *Fig.* 3.
$\overline{AN}^2 = cx + bc$ *Fig.* 4.

* $xx + aa = cx$ *Fig.* 2.
$xx + aa = cx - bc$. *Fig.* 3.
$xx + aa = cx + bc$. *Fig.* 4.

Comparant la premiere valeur de $\overline{AN}^2 = xx + aa$ avec chacune des trois suivantes, nous aurons les trois équations *. Il faut faire passer cx dans le premier membre, & aa dans le second, ajoutant à chacun $\frac{1}{4}cc$ qui est le quarré de $\frac{1}{2}c$, c'est-à-dire, de la moitié du coefficient c qui

multiplie l'inconnue x, nous aurons les 3 équations ¶, dont les premiers membres sont des quarrés parfaits qui ont pour racines $x-\frac{1}{2}c$; de sorte qu'indiquant la racine quarrée du second membre, nous aurons ✠. Enfin faisant passer $\frac{1}{2}c$ dans le second membre, l'inconnue x sera égalée à des grandeurs toutes connues, & nous aurons ℑ. Il reste à substituer au lieu des letres, & de leurs produits, les nombres qu'elles signifient & leurs produits, observant d'opérer conformément aux signes $+$, $-$, $\surd$, & l'on déterminera sur la verticale FM les points M, N, par où les lignes de projection AM, AN doivent passer. Supposons que AG$=c=1200^{t}$, la vitesse d'impulsion ou la force de la charge de poudre qui pousse la bombe hors du mortier, est donc égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur de 300^{t} (*L. II. 68.69.*). Supposons encore que l'angle BAF a été observé de 10 deg. 5 min. & la distance AF de 457 toises 4 pouces, on trouvera que les côtés, AB, BF du triangle rectangle ABF sont, sçavoir AB$=450^{t}$, BF$=80^{t}$. Selon ces suppositions $\frac{1}{4}cc=360000^{t}$, $\overline{AB}^2=aa=202500$, AG×BF$=bc=96000$.

$$xx-cx+\tfrac{1}{4}cc=\tfrac{1}{4}cc-aa.$$
$$\text{¶}\quad xx-cx+\tfrac{1}{4}cc=\tfrac{1}{4}cc-aa-bc.$$
$$xx-cx+\tfrac{1}{4}cc=\tfrac{1}{4}cc-aa+bc.$$

$$x-\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\tfrac{1}{4}cc-aa}.$$
$$\text{✠}\quad x-\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\tfrac{1}{4}cc-aa-bc}.$$
$$x-\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\tfrac{1}{4}cc-aa+bc}.$$

$$x=\tfrac{1}{2}c\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}cc-aa}.$$
$$\text{ℑ}\quad x=\tfrac{1}{2}c\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}cc-aa-bc}.$$
$$x=\tfrac{1}{2}c\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}cc-aa+bc}.$$

1°. Si on retranche de $\frac{1}{4}cc$ ou de sa valeur celle de aa, on aura $\frac{1}{4}cc-aa=157500$. 2°. Si de ce premier reste on retranche encore la valeur de bc, on aura $\frac{1}{4}cc-aa-bc=61500$. 3°. Si au pre-

$$\tfrac{1}{4}cc=360000.$$
$$\overline{AB}^2=aa=202500.$$
$$BF\times AG=bc=\ 96000.$$

$$1^{\circ}.\ \tfrac{1}{4}cc-aa\ \ldots=157500.$$
$$2^{\circ}.\ \tfrac{1}{4}cc-aa-bc=\ 61500.$$
$$3^{\circ}.\ \tfrac{1}{4}cc-aa+bc=253500.$$

mier reste 157500 on ajoute la valeur de bc on aura $\frac{1}{4}cc - aa + bc = 253500$. Les racines quarrées de ces trois grandeurs sont 397^t, 248^t, & $503\frac{1}{2}$ ou environ ; de sorte que l'inconnue x étant égalée 1°. à la somme, 2°. à la difference de $\frac{1}{2}c = 600$, & de ces racines, l'on aura $x = 600^t \pm 397^t$ *Fig.* 2. $x = 600^t \pm 248^t$ *Fig.* 3. $x = 600^t \pm 503^t\frac{1}{2}$ *Fig.* 4.

$x = 600^t \pm 397^t$ . . .	*Fig.* 2.
$x = 600^t \pm 248^t$. . .	*Fig.* 3.
$x = 600^t \pm 503^t\frac{1}{2}$. . .	*Fig.* 4.

$x = BM = 997^t$,	$x = BN = 203^t$.	*Fig.* 2.
$x = BM = 848^t$,	$x = BN = 352^t$.	*Fig.* 3.
$x = BM = 1103^t\frac{1}{2}$,	$x = BN = 96^t\frac{1}{2}$.	*Fig.* 4.

Ainsi les 2 valeurs de x pour la *fig.* 2 sont $x = BM = 997^t$, $x = BN = 203$. Pour la *fig.* 3 $x = BM = 848^t$, $x = BN = 352^t$. Pour la *fig.* 4 $x = BM = 1103^t\frac{1}{2}$, $x = BN = 96^t\frac{1}{2}$. Les racines 397, 248, & $503\frac{1}{2}$ que l'on vient de trouver sont précédées chacune des signes + & —, parce que les nombres dont elles sont les racines étant considérés comme des quarrés, peuvent être produits par ces mêmes racines supposées positives ou négatives ; c'est-là la nature du quarré algébrique, comme on sçait : lors donc qu'on tire la racine quarrée d'un nombre, & qu'il y a quelque raison de donner à cette racine les deux signes + & —, on les met à la gauche de la racine, l'un sur l'autre, pour montrer que l'on peut faire usage indifféremment de la négative, aussi-bien que de la positive. Or dans la question présente il y a deux inclinaisons de mortier, ou deux jets qui donnent la même portée ; & l'on détermine ces deux inclinaisons, ou ce qui revient au même, les deux lignes de chute respective BM, BN, en prenant la somme ou la différence de $\frac{1}{2}c = 600$ & des racines trouvées ; la somme donne la grande BM, & la différence donne la petite BN : d'où l'on voit que le calcul algébrique, aussi-bien que la Géométrie, fait trouver ces deux inclinaisons ; il fait aussi découvrir lorsque la charge de poudre

est trop petite pour porter la bombe au lieu proposé ; cela arriveroit si les grandeurs négatives qui sont sous le signe radical étoient plus grandes que les positives qui sont sous ce même signe ; car supposons que les unes soient égales aux autres, pour lors le signe radical disparoîtroit, & l'inconnue x, c'est-à-dire BM, ou BN, seroit égale à $\frac{1}{2}c$ ou $\frac{1}{2}$ AG, & les points M, N se réuniroient au point P, & la ligne BM ou BN toucheroit le cercle ; pour lors les lignes de projection AM, AN se reuniroient sur AP : or si les quantités négatives qui sont sous le signe, devenoient ensuite plus grandes que les positives, il faudroit que la verticale BM ou BN rencontrât les lignes de projection tirées du point A hors du cercle ; par conséquent le point F seroit pour lors hors de la portée, comme il a été prouvé dans la résolution géométrique art. 3. Par le calcul algébrique on détermine donc non-seulement les deux lignes de projection, mais il fait connoître quand est-ce que le Problême est impossible selon la maniere dont il est proposé. Lorsque la longueur des lignes de chute respective BM ou BN est ainsi déterminée, il faut élever au point F une verticale indéfinie qui rencontre au point B l'horizontale qui passe en A, & prendre sur cette ligne BN $=$ 203^{t} *Fig*. 2 : 352 *Fig*. 3 : & 96 *Fig*. 4 : prendre aussi BM $=$ 997^{t} *Fig*. 2 : BM $=$ 848^{t} *Fig*. 3 : & BM $=$ 1103$^{t}\frac{1}{2}$ *Fig*. 4, qui seront les lignes de chute respective : on tirera ensuite les lignes AM, AN qui seront les lignes de projection. Cela fait, on pourra connoître les angles d'inclinaison BAM, BAN par le moyen des triangles ABM, ABN dans lesquels on connoît deux côtés AB, BM & BN, & l'angle droit B. Si dans la *fig*. 4 où le lieu proposé est au-dessous de l'horizontale qui passe par le lieu de départ A, la racine de la grandeur $\frac{1}{4}cc - aa + bc$ étoit plus grande que $\frac{1}{2}c$, au lieu de retrancher cette racine de $\frac{1}{2}c$ ou de 600, pour avoir BN, il faudroit au contraire retrancher $\frac{1}{2}c$ ou 600 de la racine, pour lors l'inclinaison du mortier qui répond à BN seroit au-dessous de l'horisontale AB. Si $\frac{1}{2}c = \sqrt{}$, BN ou $\frac{1}{2}c - \sqrt{} = 0$, pour lors la ligne de projection AN est horizontale.

Résolution en nombres sans employer le calcul Algébrique.

1°. Puisque l'angle EAF est droit de même que l'angle GAB, il s'ensuit que si on retranche l'angle commun EAB, les angles BAF, EAG sont égaux ; donc les deux triangles rectangles BAF, DAC sont semblables (8. *Géom.*) : or AB=450^t, BF=80 & AD=600 ; donc par cette proportion AB 450^t. AD 600 :: BF 80^t. DC $=\frac{600\times 80}{450}=$ $106\frac{2}{3}$. Par une proportion semblable on trouvera le rayon AC ; la voici. AB450 . AD600 :: AF$457\frac{1}{18}$. AC$=\frac{600\times 457\frac{1}{18}}{450}=609\frac{61}{150}$. Si *Fig.* 3 à DK=AB=450 on ajoute CD=$106\frac{2}{3}$, on aura CK=$556\frac{2}{3}$; & si *Fig.* 4 on retranche CD de DK, le reste CK=$343\frac{1}{3}$. Dans la *Fig.* 2 CK=AB=450. Si à CK on ajoute le rayon AC, on aura *Fig.* 3, AC+CK=1166. *Fig.* 4, AC+CK=$952\frac{2}{3}$. *Fig.* 2, AC+CK=1050. Si du rayon on retranche CK, on aura *Fig.* 2, KP=150. *Fig.* 3, KP=$52\frac{2}{3}$. *Fig.* 4, KP =266 : or MK ou NK est moyenne proportionnelle entre KP & AC+CK (39. *Géom.*) : c'est pourquoi si on multiplie ces deux grandeurs l'une par l'autre, & que du produit on tire la racine quarrée, laquelle étant ajoutée à AD ou à BK, & en étant retranchée, déterminera les points M, N sur la verticale BM où les lignes de projection AM, AN passent, ces produits sont pour la *Fig.* 2, 157500 ; pour la *Fig.* 3, 61408 ; pour la *Fig.* 4, 253320, les racines de ces produits ne different de celles que nous avons trouvées dans la résolution algébrique que de peu de pieds ; de sorte que la somme de BK & de la racine donnera le point M, & la différence de la même BK à cette racine donnera le point N. Ces racines different un peu de celles qui ont été trouvées auparavant, parce que dans le calcul qu'on en a fait alors, on s'est seulement servi des côtés AB, BF du triangle ABF, au lieu que les trois côtés du même triangle sont entrés dans le calcul dont il s'agit ici : or pour avoir des nombres entiers ou des fractions exprimées

en petits nombres, il a fallu négliger quelque chose. Dans le calcul numérique il faut avoir une figure exacte pour le cas où le lieu proposé F est au-dessous de AB qui fasse connoître quand est-ce que AN doit être posée au-dessus ou au-dessous de l'horizontale AB.

4e. *Pour la page 79.* Nous avons dit article 90 du II. Livre, qu'un corps qui décrit la circonférence d'une courbe, par exemple d'un cercle, peut faire une infinité de tours avant que d'avoir perdu toute sa vitesse, en supposant qu'à chaque changement de côté il en perd une petite partie en choquant le nouveau côté qu'il rencontre, & sur lequel il va être mû. En voici la preuve avec la proposition énoncée. *Si un corps commence à décrire la circonférence d'un cercle avec une vitesse déterminée, exprimée, par exemple, par le rayon* CB *du cercle* [Fig. 5.], *la vitesse qu'il perd à chaque changement de côté ou de direction, est telle qu'il pourra décrire cette circonférence une infinité de fois avant que d'avoir perdu toute sa vitesse.*

Préparation pour la Démonstration. Supposons que le mobile est au point E & qu'il est prêt de décrire le petit côté EB, lorsqu'il sera arrivé au point B où le nouveau côté BF coupe le côté BE, il sera contraint de changer sa direction, il perdra par conséquent par le choc un peu de sa vitesse. Soit prolongé le petit côté BE vers L de même que le côté FB vers M, & après avoir pris BL=CB soit menée LN parallele à CB; on formera le triangle LBN égal & semblable au triangle BCE, car les angles alternes CBE, BLN sont égaux; l'angle FBE & l'angle BCE valent deux droits (31. *Géom.*); pareillement l'angle FBE & l'angle LBN pris ensemble valent deux droits, c'est la propriété d'une ligne droite qui en rencontre une autre (30. *Géom.*): ôtez de part & d'autre FBE, il reste l'angle LBN égal à l'angle C; donc les triangles CBE, BLN qui ont leurs angles égaux & les côtés CB, BL égaux, sont égaux & semblables; donc LN=BE. Soient encore menées LO qui fasse l'angle LON égal à l'angle

BLN, & LM perpendiculaire à BN, le triangle OLN est semblable au triangle LBN, car l'angle N est commun, & l'angle LON est par la construction égal à l'angle BLN; donc le triangle OLN est semblable au triangle BLN & au triangle BCE. Cela posé, voici la Démonstration.

Démonstration. Lorsque le corps arrive au point B où deux côtés du cercle se coupent, son mouvement se décompose en deux efforts, l'un suivant la perpendiculaire, l'autre suivant la parallele au plan d'incidence FBN (*Liv.I.* 74). La vitesse du corps étant exprimée par CB ou son égale BL, les efforts dont il s'agit ici sont exprimés par les côtés BM, LM du triangle rectangle BML (*Liv. I.* 74.), LM est la force avec laquelle le corps frappe le plan, & BM l'effort parallele qui après le choc meut le corps sur le plan; MN est donc la force ou la vitesse que le mobile perd à la rencontre du plan. Quoique la vitesse perdue MN soit moindre que si elle étoit exprimée par ON double de MN, & que la force LM avec laquelle le corps choque le plan soit moindre que si elle étoit exprimée par OL ou LN, supposons néanmoins qu'elles sont représentées l'une par ON, & l'autre par OL ou LN : les triangles semblables LBN, OLN donnent BL . LN :: LN . ON, c'est-à-dire, la vitesse primitive est à la vitesse perpendiculaire comme cette même vitesse est à la vitesse perdue dans le choc : or la vitesse BL est infiniment grande par rapport à la vitesse LN, puisque le côté LN est infiniment petit par rapport à BL ou BC; donc la vitesse LN est infiniment grande par rapport à la vitesse perdue ON : mais puisque la vitesse LN est infiniment grande par rapport à celle que le corps perd en choquant le plan, il s'ensuit qu'avec la vitesse LN il pourra choquer une infinité de fois, & faire un tour avant que de l'avoir toute perdue; donc pareillement puisque la vitesse BL est infiniment grande par rapport à la vitesse LN, il s'ensuit que le corps pourra faire une infinité de tours sur le même polygone avant qu'il l'ait toute perdue.

On peut donc supposer qu'un corps qui décrit une ligne

courbe conserve toute sa vitesse lorsque la courbure est la seule cause qui puisse la diminuer, puisqu'il faudroit que le corps la décrivît une infinité de fois auparavant qu'il l'eût entierement perdue.

5e. *Pour la page 82 après l'article 104. Si un pendule décrit dans un même cercle des arcs inégaux lorsqu'il est arrivé au bas de ces arcs, il a acquis des vitesses qui sont entr'elles comme les cordes de ces arcs.* [Fig. 6.]

Démonstration. Il faut prouver qu'un pendule qui décrit les arcs DE, FE, a au repos E des vitesses qui sont entr'elles comme les cordes ED, EF. Les vitesses que le pendule acquiert par les arcs DE, FE ne different point de celles qu'il acquerroit par les chutes verticales IE, KE (*Liv. II.* 91) : or les vitesses acquises par IE, KE sont entr'elles comme les racines quarrées de ces hauteurs (*Liv. II.* 34). Cela posé, si on nomme le diametre du cercle 2CE, les cordes ED, EF sont moyennes proportionnelles entre 2EC & EI, EK, ensorte que $\overline{DE}^2 = 2EC \times EI$ & $\overline{FE}^2 = 2EC \times EK$ (39. *Géom.*) ; donc $\overline{DE}^2 . \overline{FE}^2 :: 2EC \times EI . 2EC \times EK$, puisque ces quatre grandeurs deux à deux sont égales ; donc $\overline{DE}^2 . \overline{FE}^2 :: EI . EK$ (8. *Arith.*) ; donc $DE . FE :: \sqrt{EI} . \sqrt{EK}$ (24. *Arith.*) ; donc les vitesses acquises par les arcs DE, FE qui sont entr'elles comme les racines quarrées de EI, EK, sont aussi entr'elles comme les cordes DE, FE. (14. *Arith.*)

6e. *Pour la page 100 après l'art. 36.* On démontre dans le choc des corps, que si deux ou plusieurs corps à ressort ou non, se choquent, de quelque maniere qu'ils le fassent leur centre commun de gravité est mû avec la même vitesse avant & après le choc : cette proposition est très-belle & peut-être la plus belle de celles que l'on démontre en cette matiere. Pour ne la point laisser ignorer à ceux qui en lisant cet abrégé n'en seroient point instruits, nous l'allons démontrer pour le cas du choc direct : s'ils veulent l'éxaminer dans le choc oblique, ils pourront voir ce qu'il y a là-dessus dans les *Principes*.

1°. *Voici*

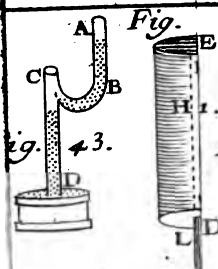
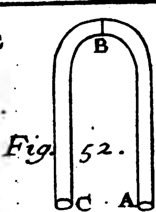
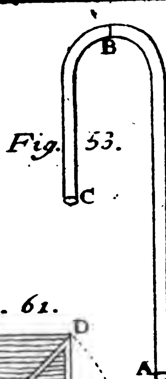
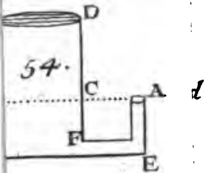
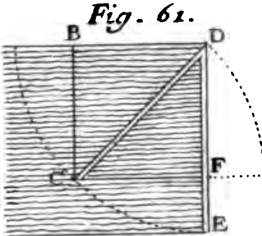

A
C
B
ig. 43.
D

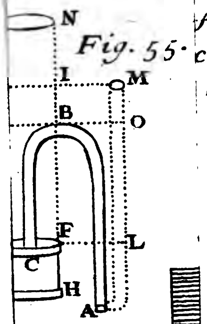

Fig.
E
H
L
D

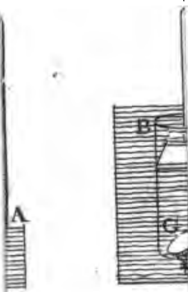

B
Fig. 52.
C
A


B
Fig. 53.
C
A


D
54.
C
A
d
F
E


Fig. 61.
B
D
C
F
E


N
f
Fig. 55.
c
I
M
B
O
F
L
C
H
A


56.
B
A
G



1°. *Voici pour le choc direct des corps sans ressort.* Supposons 1°. que les corps A, B se rencontrent au point C [*Fig.*7.8.9.], la *fig.* 7 montre que le corps B est choqué en repos, la *fig.* 8 que le corps A qui va plus vîte l'attrape en C, & la *fig.* 9 que les corps vont l'un contre l'autre. Ainsi les vitesses propres des mobiles avant le choc sont exprimées par AC & BC, & dans les 3 fig. AB est la vitesse respective (*Liv.I.22.23.*) ; c'est pourquoi si on fait la Propor. A+B . B :: AB . AD, cette ligne que l'on détermine par la proportion, exprime la vitesse que le choquant A perd par la force du choc (*Liv. III. 32.*) ; donc si de la vitesse AC du choquant on retranche la vitesse AD qu'il perd par la force du choc, le reste DC est la vitesse avec laquelle il est mû après le choc ; cette ligne exprime aussi par conséquent la vitesse du corps B après le choc, car ces deux corps vont après le choc d'une égale vitesse. (*Liv. III.20.*) 2°. Si l'on divise la ligne ou l'intervalle AB qui est entre les deux corps avant le choc en deux parties AD, DB qui soient réciproquement proportionnelles aux masses A & B, en sorte que A . B :: BD . AD, le point D est appellé *centre commun de gravité.* Ce point est ainsi appellé, parce que si l'on conçoit que la ligne AB qui joint les deux corps est inflexible, & que les deux corps ainsi attachés à cette ligne sont pesans, ils seroient en équilibre, la ligne AB étant suspendue par le point D, & l'un ne l'emporteroit point sur l'autre. 3°. *La ligne* AD *qui exprime la vitesse que le corps* A *perd dans le choc, détermine par son extrémité* D *le centre commun de gravité des corps* A & B. Car AB étant la vitesse respective avant le choc, si l'on fait cette proportion A+B . B :: AB . AD, cette derniere ligne exprime la vitesse que le choquant A perd par la force du choc comme nous venons de voir au nombre premier de cet article : si des antécedens on retranche les conséquens, & qu'on compare les restes aux mêmes conséquens, on aura la propor. A . B :: BD . AD, c'est-à-dire, qu'on a la propor. exprimée au nombre 2 ; donc suivant cette définition la ligne AD qui exprime la vitesse que le corps A perd, déter-

mine par son extrémité D le centre commun de gravité D.

Voici comment on démontre que dans le choc des corps A *&* B *sans ressort, le centre commun de gravité* C *est mû avec la même vitesse avant & après le choc.* On suppose que le point D est le centre commun de gravité des corps A,B, & que le choc se fait au point C; donc la vitesse de ce centre avant le choc est exprimée par DC, les vitesses propres des mobiles étant représentées par AC, BC: or nous venons de voir que la vitesse que le choquant A perd par la force du choc, est exprimée par AD; donc les deux corps A & B sont mûs ensemble après le choc avec la vitesse exprimée par DC; mais après le choc le point D est joint aux masses A+B qui n'en font plus qu'une, puisqu'ils vont de compagnie; donc le point D est mû après le choc avec la vitesse DC; il a donc la même vitesse après & avant le choc.

On peut démontrer la proposition pour plus de deux corps: *Ainsi dans le choc direct des trois corps* A, B, G, [Fig. 10.] *le centre commun de gravité est mû avec la même vitesse avant & après le choc.* Si on divise la ligne AB dans la raison réciproque des masses au point D, ce point sera le centre commun de gravité des corps A & B; & si l'on divise la ligne DG au point H dans la raison réciproque de la somme A+B & G, le point H sera le centre commun de gravité des corps A & B supposés en D & du corps G; le point H est donc le centre commun de gravité des trois corps A,B,G; donc HC exprime la vitesse de ce centre avant le choc. Cela posé, que les corps A, B, G se choquent en un seul & même instant au point C, ou que l'on conçoive que le corps A choque d'abord le corps B au point C dans un premier instant, & qu'ensuite le choc se fait entre les corps A+B réunis en une masse, & le corps G, la vitesse des trois corps après le choc sera la même dans l'une & l'autre hypothèse, car la quantité de mouvement après le choc sera égale à la somme des mouvemens avant le choc, si les trois corps vont d'un même côté, ou à leur différence si deux corps vont d'un même côté & l'autre dans un sens opposé, soit que le choc se fasse en un seul instant, soit que le choc se fasse en deux in-

ſtans ; donc la viteſſe du centre de gravité ſera la même dans l'une & l'autre hypothèſe : or ſi le corps A choquoit d'abord le corps B en C, il perdroit la viteſſe AD & la viteſſe commune après le choc ſeroit exprimée par DC ; mais puiſque les corps A+B ne font plus qu'une maſſe dont la viteſſe eſt DC, & que le point H eſt le centre commun de gravité de A+B & G, la maſſe A+B perdra la viteſſe DH, comme il vient d'être prouvé aux nombres 1, 2, 3 ; donc les trois corps A, B, G ſeront mûs après le choc avec la viteſſe CH, & par conſéquent leur centre commun de gravité, eſt mû après de même qu'avant le choc avec la viteſſe CH. On peut appliquer ce raiſonnement à tant d'autres corps qu'on voudra,

3. *Voici pour les corps à reſſort.* p. 106. Suppoſons que les corps ſe rencontrent au point C, la *fig.* 11 montre que le corps B eſt choqué en repos, la *fig.* 12 que le corps A attrape en C le corps B qui va devant, & la *fig.* 13 que les corps vont l'un contre l'autre, & qu'ils ſe rencontrent en C. Si AD eſt la viteſſe que le corps A perd par la force du choc durant la compreſſion du reſſort, le point D eſt le centre commun de gravité, & DC ſa viteſſe avant le choc ; & AC & BC étant les viteſſes propres des corps A & B auſſi avant le choc, AB eſt la viteſſe reſpective avant qu'ils ſe rencontrent en C. (*Liv. I.* 23.) Cela poſé, 1°. le corps A que l'on ſuppoſe le plus fort eſt mû après le choc avec la différence de la viteſſe commune à celle que le reſſort lui donne ou à celle qu'il perd durant la compreſſion (*Liv. III.* 27. 28. 38. *n.* 3.) : or la viteſſe commune eſt DC ; donc ſi on prend CG=AD−DC ou CG=DC−AD, ce ſera la viteſſe avec laquelle le corps A ſera mû après le choc, & il arrivera en G dans un tems égal à celui pendant lequel il a parcouru AC ; de plus les corps A, B ſe ſéparent avec une viteſſe égale à celle avec laquelle ils ſe ſont approchés, c'eſt-à-dire, que la viteſſe reſpective eſt la même après & avant le choc (*Liv. III.* 46.) ; donc le corps A arrivant en G, le corps B ſera en H ſi GH = AB, & ſi l'on prend GI=AD, le point I ſera le centre commun

de gravité, & CI la viteſſe qu'il a après le choc. 2°. Je dis que CI=DC, car dans le cas où la viteſſe commune DC eſt moindre que la viteſſe que le choquant A perd ou bien moindre que celle que le reſſort lui donne, il retourne en arriere ; ainſi pour lors CG=AD—DC ou CG+DC =AD [*Fig.* 11. 13.] ; & parce que GH=AB & que le point I eſt le centre commun de gravité GI=AD ; donc GI=CG+DC : or GI=CG+CI ; car puiſque GC= AD—DC, il s'en ſuit qu'elle eſt moindre que AD; or GI= AD ; donc GI eſt plus grand que GC ; donc le point I eſt entre le point C & le point H ; donc GI=CG+CI ; *Fig.*11.13.] donc CG+DC=CG+CI; donc CI=DC. Lorſque la viteſſe commune DC eſt plus grande que la viteſſe de reſſort AD, l'on a DC—AD=CG [*Fig.*12.], & DC =CG+AD : or GI=AD puiſque les corps étant en G, H, le poiut I eſt leur centre commun de gravité, & que d'ailleurs GH=AB; donc DC=CG+GI ou DC=CI.

7e. *Pour la page 106 après l'article 45.* Ce qu'on va démontrer du choc de trois & de pluſieurs corps à reſſort placés ſur une même lig. droite eſt très-curieux. 1°. Trois corps *a*, *b*, *c*, inégaux en maſſes ſe ſurpaſſent de ſuite : le premier eſt plus grand que le ſecond, & le ſecond plus grand que le troiſiéme. Cela poſé, *Si le corps* a *choque le corps* b *en repos, & enſuite le corps* b, *le corps* c *pareillement en repos, le corps* c *recevra une plus grande viteſſe que s'il étoit choqué immédiatement par le corps* a.

2°. PRÉPARATION. Si *l'on multiplie la ſomme des maſſes* a+c *du premier & du troiſiéme par la maſſe* b *du ſecond, l'on aura* ab+cb ; *ſi on multiplie pareillement la maſſe* a *du premier par la maſſe* c *du troiſiéme, qu'au produit* ac *on ajoute le quarré* bb *de la maſſe du ſecond, je dis que* ab+bc > *que* bb+ac. Pour prouver la propoſition, il ſuffit de faire voir qu'en retranchant *bb+ac* de *ab+bc*, le reſte qui eſt *ab+bc—bb—ac* eſt une grandeur poſitive : or cela eſt ainſi ; car cette grandeur eſt le produit de *a—b* par *b—c* qui ſont deux grandeurs poſitives, puiſque *a* > *b* & *b* > *c*.

3°. *Démonstration.* La vitesse du corps a étant exprimée par 1, sa quantité de mouvement est $1 \times a$; & si l'on divise cette quantité par la somme des masses $a+b$, l'on aura $\frac{a}{a+b}$ qui est la vitesse commune de ces deux corps après le choc (*Liv. III.* 37.); & parce que le ressort se comprime avec une force égale à celle que le choquant a perd durant la compression, ou égale à celle qu'il communique durant ce tems au corps b (*Liv. III.* 15. 25. 27.), il s'ensuit que si on double la vitesse $\frac{a}{a+b}$, $\frac{2a}{a+b}$ est toute la vitesse que le corps b reçoit tant de la force du choc que de la force du ressort, laquelle étant multipliée par la masse b, le produit $\frac{2ab}{a+b}$ est la quantité de mouvement de ce corps; & si l'on divise cette quantité par la somme des masses $b+c$, le quotient $\frac{2ab}{ab+bb+ac+bc}$ est la vitesse commune des corps b & c après le choc. Pareillement si on divise le mouvement $1 \times a$ du corps a par la somme des masses $a+c$, le quotient $\frac{a}{a+c}$ est la vitesse commune des corps a & c après le choc; & si l'on multiplie les deux termes de cette fraction par $2b$, la nouvelle fraction $\frac{2ab}{2ab+2bc} = \frac{a}{a+c}$ (8. *Arith.*). Les vitesses que le corps c reçoit du corps a immédiatement & par l'interposition du corps b, sont donc entr'elles comme les fractions $\frac{2ab}{2ab+2bc}$, & $\frac{2ab}{ab+bb+ac+bc}$: or ces deux fractions sont entr'elles réciproquement comme leurs dénominateurs (23. *Arith.*); donc les vitesses que le corps c reçoit immédiatement du corps a, & par l'interposition du corps b sont entr'elles comme $ab+bb+ac+bc$, & $2ab+2bc$; cela étant ainsi, je dis que la premiere de ces deux grandeurs est moindre que la seconde; il faut retrancher de l'une & de l'autre $ab+bc$, les restes seront $bb+ac$ & $ab+bc$; mais le premier de ces restes est moindre que le second, comme il vient d'être prouvé dans la préparation; donc $ab+bb+ac+bc$ est moindre que $2ab+2bc$; donc la vitesse que le corps c reçoit étant choqué immédiatement par le corps a est moindre que lorsqu'il est choqué par le corps interposé b. On peut substituer au lieu des lettres a,b,c tels nombres que l'on voudra, pourvu que le premier a soit plus grand que le second b, & le second b plus grand que le troisiéme c.

Si le choc commençoit par *c* qui est le plus petit des trois, on trouveroit encore en faisant le calcul, que les vitesses que le corps *a* reçoit étant choqué immédiatement par le corps *c* & par le corps interposé *b*, sont entr'elles comme $ab+bb+ac+bc$ & $2ab+2bc$.

4. *Coroll.* Il est évident que le corps moyen *b* demeurant moindre que le corps *a* & plus grand que le corps *c*, peut augmenter ou diminuer, & que dans tous ces changemens de masses il communiquera des vitesses différentes au corps *c* : or on peut demander quelle masse doit-il avoir pour communiquer au corps *c* la plus grande vitesse possible.

5. *Préparation pour résoudre la question.* Supposons que la masse *b* est moyenne proportionnelle entre *a* & *c*, ensorte que si la masse $a=8$ & $c=2$, *b* soit égale à 4, & que l'on ait $8 . 4 :: 4 . 2$. Supposons un autre corps *d* dont la masse soit plus grande ou moindre que la masse du corps $b=4$: Je *dis que si d'un côté on multiplie la somme des trois corps* $a+d+c$ *par* d, *qu'au produit* $ad+dd+dc$ *on ajoute le quarré de* b *pour avoir* $ad+dd+dc+bb$; *que d'un autre côté on multiplie la somme du premier & du troisiéme* $a+c$, *ajoutée à* $2b$ *double du corps moyen proportionnel* b *par* d, *c'est-à-dire, si on multiplie* $a+c+2b$ *par* d *pour avoir le produit* $ad+dc+2db$, *le premier produit* $ad+dd+dc+bb > ad+dc+2bd$. Retranchons de part & d'autre de ces deux produits $ad+dc$, le premier reste $dd+bb > 2bd$ qui est le second reste, cela est vrai si après avoir retranché le reste $2bd$ du premier $dd+bb$, le nouveau reste $dd+bb-2db$ est une grandeur positive, soit que l'on suppose $d > b$ ou $b > d$, ce qui est évident, car ce reste est le quarré de $d-b$ ou de $b-d$. Cela posé,

Je dis que si le corps interposé b *est moyen proportionnel géométrique entre les deux masses extrêmes* a *&* c, *il communiquera au corps* c *une vitesse plus grande que tout autre corps* d *plus grand ou moindre que* b.

Nous avons vu (*art.7.n.* 3.) que la vitesse que le corps *c* reçoit de l'interposé *b* est égale à $\frac{2ah}{ab+bb+ac+bc}$; donc celle qu'il reçoit de l'interposé *d* plus grand ou moindre que *b*

est $\frac{2ad}{ad+dd+ac+dc}$; donc les viteſſes que le corps c reçoit des interpoſés b & d, ſont entr'elles comme ces deux fractions. Cela poſé, l'hypothèſe donne $a . b :: b . c$; donc $bb = ac$ il faut mettre bb au lieu de ac, & après avoir diviſé les deux termes de chaque fraction ſçavoir de la premiere par b, & de la ſeconde par d, nous aurons les deux nouvelles fractions $\frac{2a}{a+2b+c}$ & $\frac{2a}{a+d+c+\frac{bb}{d}}$ (8. *Arith.*) ; donc les viteſſes que le corps c reçoit des corps b & d, ſont auſſi entr'elles comme ces mêmes fractions, leſquelles ayant un même numérateur, ſont entr'elles réciproquement comme leurs dénominateurs (23. *Arith.*) ; donc les viteſſes que le corps c reçoit des interpoſés b & d, ſont entr'elles comme $a+d+c+\frac{bb}{d}$ & $a+2b+c$: il faut ôter la fraction en multipliant tous les termes de l'une & de l'autre par d, & nous aurons $ad+dd+dc+bb$ & $ad+2bd+dc$ qui repréſentent encore ces même viteſſes (8. *Arith.*) : or la premiere de ces grandeurs eſt plus grande que la ſeconde ; car ſi on retranche de l'une & de l'autre $ad+dc$, le reſte $dd+bb$ eſt plus grand que le reſte $2bd$, comme il a été prouvé dans la préparation ; donc la viteſſe que le corps c reçoit du moyen proportionnel b eſt plus grande que celle qu'il reçoit de l'interpoſé d plus ou moins grand que b.

On prouvera par un raiſonnement & des opérations ſemblables, que ſi le choc commence par le petit corps c, & qu'il ſe termine au grand corps a, celui-ci reçoit plus de viteſſe de l'interpoſé b lorſqu'il eſt moyen proportionnel entre a & c, que de l'interpoſé d plus ou moins grand que b.

6. *Coroll.* De-là il s'enſuit que ſi l'on a pluſieurs corps de ſuite a,b,c,d,e,f, &c. dont les maſſes ſoient en progreſſion Géometrique, la viteſſe que le premier communiquera au dernier par ceux qui ſont interpoſés eſt la plus grande qu'il eſt poſſible, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt plus grande que ſi les corps n'étoient pas moyens proportionnels, quoique d'ailleurs plus grands ou moindres que les corps b, c, d, e. Car la viteſſe que le corps b communiquera au corps c ſera plus

grande que celle que tout autre corps plus grand ou moindre que b communiqueroit ; de même puisque c est moyen géométrique entre b & d, il communiquera au corps d plus de vitesse que tout autre corps plus grand ou moindre que c, &c.

7. S'il y a plusieurs corps de suite a, na, n^2a, n^3a, &c. ils sont en progression Géometrique : car $a . na :: na . n^2a$ puisque le produit des extrêmes est égal au quarré du moyen, ce qui est d'ailleurs évident, parce que le second na contient le premier a, n de fois, le troisiéme contient aussi le second na, n de fois : or si on suppose que le premier qui est a choque le second na, que le second choque le troisiéme n^2a, &c. les vitesses que les choqués reçoivent sont aussi en progression Géometrique ; car la vitesse du premier qui est a étant 1, sa quantité de mouvement est $1 \times a$, laquelle étant divisée par la somme des masses $a + na$ du premier & du second, le quotient $\frac{a}{a+na}$ est la vitesse commune que le second corps na reçoit durant la compression du ressort, laquelle étant multiplié par 2, le produit $\frac{2a}{a+na}$ ou $\frac{2}{1+n}$ en divisant les deux termes par a, est la vitesse totale que le second corps reçoit, comme il a été prouvé dans cet art. *n.* 3. Pareillement si on multiplie la vitesse $\frac{2}{1+n}$ par la masse na du second corps pour avoir sa quantité de mouvement $\frac{2na}{1+n}$, qu'on la divise par la somme des masses $na + n^2a$ du même second corps & du troisiéme, qu'on double ensuite ce produit, on aura $\frac{2 \times 2na}{\overline{1+n} \times \overline{na+n^2a}}$, ou en divisant les deux termes par na $\frac{2 \times 2}{\overline{1+n} \times \overline{1+n}}$ qui sera la vitesse du troisiéme corps n^2a, laquelle étant multipliée par la masse n^2a, le produit $\frac{2 \times 2 \times n^2a}{\overline{1 \times n} \times \overline{1 \times n}}$ est la quantité de mouvement de ce corps qu'il

faut diviser par la somme des masses n^2a+n^3a de ce même corps & du quatriéme, & multiplier le quotient par 2 pour avoir $\frac{2\times2\times2\times n^2a}{\overline{1+n}\times\overline{1+n}\times\overline{n^2a+n^3a}}$, ou en divisant les deux termes par n^2a $\frac{2\times2\times2}{\overline{1+n}\times\overline{1+n}\times\overline{1+n}}$, ce sera la vitesse du quatriéme corps : ainsi les vitesses sont $1 . \frac{2}{1+n}$, $\frac{2\times2}{\overline{1+n}\times\overline{1+n}} . \frac{2\times2\times2}{\overline{1+n}\times\overline{1+n}\times\overline{1+n}}$, &c. qui sont en progression Géometrique, puisque le quarré d'un des termes moyens est égal au produit de deux termes qui en sont également éloignés : d'où l'on voit que pour avoir la vitesse que reçoit un corps de la progression, il faut élever $\frac{2}{1+n}$ au degré marqué par le rang que le corps occupe dans la progression, diminue d'une unité : ainsi pour avoir la vitesse du dixiéme corps qui est n^9a, il faut élever $\frac{2}{\overline{1+n}}$ à la neuviéme puissance. Supposons que la moindre masse soit 1, & que l'exposant $n=2$, les masses croîtront en raison double, & elles seront dans cette progression 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 128 . 256 . 512 ; ainsi ce dernier nombre représente le dixiéme corps, il est aussi la neuviéme puissance de 2 ; la neuviéme puissance de $1+n$, c'est-à-dire, de 3 est 19683, on la trouvera en multipliant 3 successivement 8 fois par lui-même : la vitesse que le dixiéme corps reçoit du premier par l'interposition des 8 autres, est donc exprimée par cette fraction $\frac{512}{19683}$. Pour avoir la vitesse que la masse 1 communique immédiatement au corps 512, il faut multiplier la masse 1 par sa vitesse 1 pour avoir sa quantité de mouvement 1×1 qu'il faut diviser par la somme des masses $512+1$ ou 513, doubler le quotient $\frac{1\times1}{513}$, & $\frac{2}{513}$ est la vitesse que le dixiéme corps reçoit, étant choqué immédiatement par la masse 1. Les vitesses que le dixiéme corps reçoit dans le choc immédiat & dans le choc

médiat, ſont donc entr'elles comme les fractions $\frac{2}{513}$ & $\frac{512}{19683}$, ou bien comme $\frac{39366}{9310059}$ & $\frac{262656}{9310059}$ en les réduiſant au même dénominateur, ou bien encore comme les numérateurs 39366, 262656 (8. *Arith.*) : or le premier de ces deux nombres eſt contenu dans le ſecond $6\frac{2}{3}$ de fois un peu plus, ainſi les viteſſes dont il s'agit ici ſont entr'elles comme 1 & $6\frac{2}{3}$.

8. Si le choc commence par le dixiéme corps 512, & qu'il ſe termine à la maſſe 1 qui eſt la moindre de toutes, on aura 1°. la viteſſe que cette maſſe 1 reçoit du corps n^9 en multipliant la maſſe 512 par la viteſſe 1, & après avoir diviſé la quantité de mouvement $n^9 \times 1$ ou 512×1 par la ſomme des maſſes $n^9 + 1$ ou 513, en multipliant encore le quotient $\frac{512}{513}$ par 2, & $\frac{1024}{573}$ eſt la viteſſe que le corps n^9 communique à la maſſe 1 en la choquant immédiatement. Pour avoir la viteſſe que la maſſe n^9 ou 512 communique à la maſſe 1 par l'interpoſition des huit autres corps, nous remarquerons que les viteſſes que ces corps prennent ſont auſſi en progreſſion Géométrique, de même que ſi le mouvement commençoit par le petit corps : ainſi la viteſſe du corps n^9 étant 1, celle du corps n^8 ſera $\frac{2n}{\overline{n+1}}$, celle du corps n^7, ſera $\frac{2 \times 2n^2}{\overline{n+1} \times \overline{n+1}}$, celle du corps n^6 ſera $\frac{2 \times 2 \times 2n^3}{\overline{n+1} \times \overline{n+1} \times \overline{n+1}}$: car ſi on multiplie la maſſe n^9 ou 512 par ſa viteſſe 1 qu'on diviſe la quantité de mouvement n^9 par la ſomme des maſſes $n^9 + n^8$, & qu'on double le quotient, $\frac{2n^9}{n^9 + n^8}$, ou bien en diviſant les deux termes par n^8, $\frac{2n}{n+1}$ eſt la viteſſe du corps n^8. Pour avoir la viteſſe du corps n^7, je multiplie la maſſe n^8 par ſa viteſſe $\frac{2n}{n+1}$, & je diviſe la quantité de mouvement $\frac{2n \times n^8}{\overline{n+1}}$ par la ſomme des maſſes $n^8 + n^7$, & après avoir doublé le quo-

tient, j'ai $\frac{2\times 2n\times n^8}{\overline{n+1}\times\overline{n^8+n^7}}$, ou en divisant par n^7 $\frac{2\times 2\times n\times n}{\overline{n+1}\times\overline{n+1}}$; les viteſſes des corps n^9, n^8, n^7 ſont donc entr'elles comme 1, $\frac{2\times n}{n+1}$ & $\frac{2\times 2\times n\times n}{\overline{n+1}\times\overline{n+1}}$: or ces trois viteſſes ſont en proportion continue, & ſont les trois premiers termes d'une progreſſion Géometrique, puiſque le quarré du ſecond eſt égal au produit du premier & du troiſiéme; cela étant, il eſt viſible que pour avoir la viteſſe d'un corps de la progreſſion, il faut élever $\frac{2n}{n+1}$ à la puiſſance marquée par le nombre qui indique le rang que ce corps tient après le corps n^9, en ſuppoſant que la progreſſion commence par ce même corps n^9. D'où l'on voit que pour avoir la viteſſe de la maſſe 1, il faut élever $\frac{2n}{n+1}$ à la neuviéme puiſſance, c'eſt-à-dire, multiplier cette fraction huit fois ſucceſſivement par elle-même : l'expoſant $n=2$ donne $\frac{2n}{n+1}=\frac{4}{3}$, dont la neuviéme puiſſance $\frac{262144}{19683}$: les viteſſes que la maſſe 1 reçoit du dixiéme corps n^9 dans le choc immédiat & dans le choc médiat, ſont donc entr'elles comme $\frac{1024}{513}$ & $\frac{262144}{19683}$; les quotiens de ces diviſions ſont 2 & $13\frac{1}{3}$ l'un & l'autre un peu plus grands qu'il ne faut, ces viteſſes ſont donc entr'elles comme 2 & $13\frac{1}{3}$, ou comme 1 & $6\frac{2}{3}$ un peu plus, de même que lorſque le choc commence par le moindre corps.

9. On peut abréger conſidérablement ces opérations par les logarithmes, ſur-tout lorſque le rang du corps dont on cherche la viteſſe eſt fort éloigné du premier terme de la progreſſion. Suppoſons encore qu'il faille trouver la viteſſe du corps n^9. Il faut élever la fraction $\frac{2}{n+1}$ à la neuviéme puiſſance en opérant par les logarithmes : le logarithme de 2 eſt 3010300, celui de $n+1$ ou de 3 eſt 4771213, il faut mnltiplier l'un & l'autre par 9, & les produits 27092700, 42940917 ſont les logarithmes de la neuviéme puiſſance de 2 & de 3; il faut retrancher le premier du ſecond, & le reſte 15848217 eſt le logarithme

du nomb. 39 ou d'un nombre qui en differe peu, (celui-ci étant un peu plus grand que le veritable,) & il sera le dénominateur de cette fraction $\frac{1}{39}$, laquelle exprime la vitesse que le corps n^9 reçoit de la masse 1 en le choquant par les corps interposés. Pour avoir la vitesse que la masse 1 communique immédiatement au corps n^9, cette vitesse étant exprimée par $\frac{2}{1+n^9}$, il faut élever $n=2$ à la neuviéme puissance par le moyen de son logarithme 3010300 en le multipliant par 9, ce qui a été fait, & le produit est 27092700, ce nombre est le logarithme de 512, à ce nombre il faut ajouter l'unité pour avoir $513=1+n^9$, le logarithme de ce nombre est 27101174 duquel il faut retrancher le logarithme 3010300 du numérateur 2 de la fraction $\frac{2}{1+n^9}$ & le reste 24090874 est le logarithme d'un nombre à peu-près égal à 257 qui est le dénominateur de cette fraction $\frac{1}{257}$, c'est la vitesse que le corps n^9 reçoit immédiatement de la masse 1 : ainsi cette vitesse & celle qu'il reçoit dans le choc médiat sont entr'elles comme $\frac{1}{257}$ & $\frac{1}{39}$, ou bien comme 39 & 257 (23. *Arith.*), ou bien comme 1 & $6\frac{2}{3}$ à peu-près. On trouvera par une opération semblable que si le mouvement commence par le corps n^9, les vitesses que la masse 1 en reçoit sont aussi dans ce rapport de 1 à $6\frac{2}{3}$ ou environ.

10. Mais pour montrer qu'on abrege considérablement par cette méthode, supposons qu'il faille trouver les vitesses que le corps n^{99} qui est le centiéme, reçoit de la masse 1 qui est le premier corps, il faut multiplier comme dans l'éxemple précedent, les logarithmes de 2 & de 3 de la fraction $\frac{2}{3}=\frac{2}{n+1}$ par 99, & l'on aura les deux produits 29801970O & 4723500087 qui sont les logarithmes des deux termes de la fraction $\frac{2}{3}$ élevée à la 99e puissance : la fraction $\frac{2}{1+n^{99}}$ exprimant la vitesse que le corps n^{99} reçoit immédiatement de la masse 1, & cette masse étant

comme insensible par rapport à la masse n^{99}, on peut la négliger; ainsi 3010300 & 298019700 sont les logarithmes des deux termes 2 & n^{99} de la fraction $\frac{2}{1+n^{99}}$. Il faut retrancher le premier de ces quatre logarithmes du second; & le troisiéme du quatriéme, & les restes 174330387, 295009400 sont les logarithmes des dénominateurs de deux fractions qui ont l'unité pour numérateur, lesquelles expriment les vitesses, sçavoir la premiere, la vitesse que le corps n^{99} reçoit des corps interposés, & la seconde la vitesse qu'il reçoit du choc immédiat de la masse 1; donc ces fractions & conséquemment les vitesses qu'elles représentent, sont entr'elles réciproquement comme les dénominateurs, ou réciproquement comme les nombres dont les restes précedens sont les logarithmes, puisque (23. *Arith.*) ces fractions ont un même numérateur qui est l'unité; de sorte que si on divise le second de ces nombres par le premier, ce qui se fait en retranchant le logarithme du premier du logarithme du second, il seront réduits à l'unité & au nombre qui aura pour logarithme le reste de la soustraction, c'est-à-dire, que la vitesse que le corps n^{99} reçoit immédiatement de la masse 1, & celle qu'il reçoit des corps interposés sont entr'elles comme l'unité & le nombre qui a pour logarithme 12.0679013. Ce logarithme qui a pour figurative 12 ne se trouve point dans les Tables; pour sçavoir à quel nombre il appartient, il faut retrancher 8 de la figurative 12, & on trouvera dans les Tables qui vont jusqu'à 20000 le logarithme 4.0679013 ou celui qui en approche le plus, sçavoir 40678888 qui répond à 11692 auquel il faut ajouter autant de 0 que le chifre 8 qu'on a retranché de la figurative 12 contient d'unités: ainsi la vitesse que le corps n^{99} reçoit immmédiatement, & celle qu'il reçoit des corps interposés sont entr'elles comme 1 à 1169200000000. Si les tables n'étoient pas calculées pour les nombres naturels jusqu'à 20000, il faudroit ôter 9 de la figurative 12 au lieu de 8, & on trouveroit dans les Tables le surplus de ce logarithme, ou celui qui en approcheroit le plus.

11. Si le choc commençoit par le plus grand n^{99} le rapport des viteſſes feroit encore le même, ainſi qu'on a vû dans le premier exemple, mais avec cette différence que les viteſſes conſiderées en elles-mêmes feroient plus grandes, elles iroient en augmentant, au lieu que ſi le choc commence par le moindre corps, elles vont en diminuant & ſont moindres que la viteſſe primitive de la maſſe 1.

12. Nous allons encore voir de combien la viteſſe réelle du corps n^{99} eſt augmentée dans la moindre maſſe 1 lorſqu'il la choque par les corps interpoſés.

Nous avons vu que pour avoir cette viteſſe il falloit élever $\frac{2n}{n+1}$ à la 99e puiſſance par le moyen des logarithmes de $2n=4$ & de $n+1=3$. Le logarithme de 3 eſt 4771213, il a déja été multiplié par 99, & le produit eſt 472350087. Le logarithme de 4 eſt 6020600, lequel étant multiplié par 99, donne pour produit 596039400; ces deux produits ſont les logarithmes des nombres 3 & 4 élevés à la puiſſance 99 : je retranche le premier du ſecond, & le reſte 12.3689313 eſt le logarithme du nombre qui exprime la viteſſe que le grand corps n^{99} communique au corps 1 par ceux qui ſont interpoſés, ce logarithme n'eſt point dans les Tables : de la figurative 12 j'ôte 9 & le reſte 3.3689313 ou bien le logarithme 3.3688445 qui en approche le plus, répond à 2338 auquel il faut ajouter autant de 0 qu'il y a d'unités dans le chifre 9 qui a été retranché de la figurative 12, & la viteſſe que le corps n^{99} a lorſqu'il commence à choquer la file qui s'étend juſqu'à la maſſe 1 & à celle que la maſſe 1 reçoit des corps interpoſés comme 1 à 2338000000000. On pourroit trouver ce nombre & les précedens avec plus de préciſion au moyen de certaines opérations, ou en ſe ſervant des grandes Tables; c'eſt ainſi que M. Bernoulli dans ſon Diſcours ſur les loix de la communication du Mouvement année 1724, en obſervant que le nombre de M. Huygens qui le premier a calculé cette viteſſe eſt fautif, en ce qu'il le fait 150 fois moindre qu'il ne doit être, trouve 2338500000000 où il y a 5 au lieu du premier 0. On s'eſt un peu étendu ſur cette

matiere, tant pour montrer l'usage des formules précedentes, & la maniere de se servir des Tables des Logarithmes en cette rencontre, que pour prévenir les difficultés que pourroient trouver ceux qui n'étant point accoutumés à faire ces calculs, voudroient néanmoins les faire pour s'assurer par eux-mêmes que la prodigieuse augmentation de vitesse que le choquant doit produire dans le choqué à mesure qu'il en est plus éloigné par l'interposition des corps moyens est conforme à la loi du choc des corps à ressort.

PROBLÊME.

8e. Pour la page 107 après l'art. 46.

Faire ensorte que deux corps se choquent directement avec des vitesses qui soient entr'elles dans une raison donnée, par exemple, dont l'une soit double de l'autre. [Fig. 14. 15.]

Il faut tirer sur un plan vertical, par exemple, sur un mur bien uni, la lig. horizon. DE sur laquelle il faut prendre DE égale à la somme des deux demi-diametres des boules que l'on veut faire choquer, & attacher aux points D,E deux pendules faisant ensorte que si les boules sont inégales, leurs centres G, H soient également distans des points de suspension D, E; & afin que les boules en décrivant les arcs NI, ML ne choquent ni ne frottent point contre le plan vertical, il faut que les filets qui les soutiennent & les centres G, H des boules soient distans de ce plan d'une longueur égale au demi-diam. de la grande boule. 2°. Il faut décrire des points D, E comme centre des arcs IN. LM qu'il faut diviser en degrés par des lignes DN, EM, &c. dirigées aux centres D,E. Cela fait, si on veut que la boule G choque la boule H en repos, il faut élever le centre G en X en retenant la boule avec le filet PT [*Fig.* 15.], & la laisser ensuite aller. Si on veut que la boule G choque encore la boule H en repos avec une vitesse double, triple, &c. il faudra prendre des arcs LM dont les cordes soient doubles ou triples de la corde LX, & les vitesses que la boule G acquerra par les arcs LM seront doubles

ou triples de la viteſſe acquiſe par l'arc XL. *Voyez le cinquiéme renvoi* : ſi on veut que les boules G,H ſe choquent en ſens contraires avec des viteſſes en raiſon réciproque des maſſes, il faut prendre des arcs LX, IN dont les cordes ſoient dans la raiſon réciproque des maſſes & les boules ſe choqueront en D avec des quantités égales de mouvement. Pour s'aſſurer ſi le centre de la boule répond au point d'où l'on veut le faire deſcendre, par exemple, au point X, il faut avoir un corps de la fig. d'un priſme droit [*Fig.* 16.] marquer ſur la ligne EX la partie XY égale au demi diametre de la boule G, ſi l'on applique le priſme ſur le plan vertical par la baſe *abc*, de maniere que l'une des arrêtes, par exemple, *bg* ſoit perpendiculaire à XY au point Y, ſi l'on prend auſſi *by* égale XY, l'on ſçaura que le centre G répond au point X lorſque la boule touchera l'arrête *bg* au point *y*.

9ᵉ. 1°. Il y a dans les Sciences des points principaux qu'on ne ſçauroit trop éclaircir ni trop appuyer par de bonnes raiſons ; dans la méchanique le mouvement compoſé eſt de ce nombre. Nous avons prouvé (*Liv. I.* 64.) *Que ſi deux puiſſances ſont entr'elles comme les côtés d'un parallelogramme formé ſur leurs directions, elles ſont décrire à un corps qu'elles pouſſent ou tirent ſuivant ces côtés, la diagonale du parallelogramme dans le tems que chacune lui feroit décrire le côté ſuivant lequel elle agit.* Ce principe répand un jour merveilleux dans la phyſique & dans la méchanique ; on ne peut point avancer qu'on ne le rencontre, & l'on eſt obligé de s'en ſervir ſans pouvoir l'éviter : entre toutes les preuves que l'on en donne, il y en a une qui contente l'imagination, mais la raiſon plus délicate y trouve quelque choſe à redire. Concevons qu'un des côtés du parallelogramme eſt une regle mobile qui mue parallelement à elle-même décrit l'autre côté, tandis qu'un corps qui eſt ſur la regle en parcourt la longueur : nous avons fait voir (*Liv. I.* 65.) que ce corps ſe trouve pendant tout le mouvement de la regle ſur la diagonale, & qu'il la décrit. Il eſt vrai, le corps

corps décrit la diagonale, répond *M. Dalembert de l'Académie Royale des Sciences*, mais c'est en supposant que les puissances dirigées suivant les côtés du parallelogramme agissent sur le corps pendant tout le tems du mouvement, ce qui n'est pas précisément l'état de la question; car lorsque le corps a pris une direction moyenne, les tendances suivant les côtés n'existent plus, il n'y a plus de réel que sa tendance suivant la diagonale. C'est déja un grand talent de découvrir le défaut d'une démonstration, & de faire sentir tout ce qu'il est, mais la perfection de la science consiste à le réparer; c'est aussi ce que l'Auteur fait dans l'ingénieux & le sçavant ouvrage qu'il vient de donner intitulé *Traité de Dynamique, &c.* Nous allons exposer sa pensée dans la proposition suivante.

2°. *Si deux puissances quelconques agissent à la fois sur un corps ou un point* A [Fig. 17] *pour le mouvoir, l'une de* A *en* B *uniformément pendant un certain tems, l'autre de* A *en* C *uniformément pendant le même tems, & qu'on acheve le parallelogramme* AB DC; *je dis que le corps* A *parcourra la diagonale* AD *uniformément, dans le même tems qu'il eut parcouru* AB, *ou* AC.

Préparation pour la Démonstration. Comme il est encore douteux que le corps A doive décrire la diagonale AD, supposons pour un moment que A*g* est la ligne qu'il parcourt, elle est inconnue, parce que nous n'en connoissons point encore la position; mais nous allons faire voir que cette ligne se confond avec la diagonale AD, & qu'elle n'en est point différente. Concevons que le corps A est posé sur un plan qui puisse glisser librement entre les deux coulisses KL, IM paralleles à AC, si lorsque le corps est arrivé à quelque point *g* de la ligne A*g*, on supposoit que deux puissances vinssent à agir sur lui, dont l'une tendît à le mouvoir suivant *gc* parallele AC avec la même vitesse qu'il a en A suivant AC, & en sens contraire, & l'autre tendît à lui faire parcourir la ligne *go* égale & parallele à AB, & en sens contraire dans le même tems qu'il auroit parcouru AB, il est clair que le corps resteroit en repos;

car les puissances supposées étant égales aux puissances suivant AC, AB, & semblablement dirigées, mais en sens contraires, doivent lui donner aussi la même vitesse en sens contraire: or au lieu de supposer que les puissances suivant *gc*, *go* sont appliquées au corps, concevons qu'elles sont appliquées au point *g* du plan, l'une donnant à ce plan la vitesse *gc*, & l'autre donnant à la coulisse & au plan la vitesse *go*; il arrivera nécessairement deux choses, 1°. le point *g* du plan sera mû suivant *g*A, puisque ce point reçoit les mêmes vitesses que ces puissances auroient données au corps A supposé en *g*. 2°. Le corps A continuera de se mouvoir sur ce plan suivant A*g* avec sa premiere vitesse; le corps A & le point *g* du plan seront donc mûs sur A*g* avec la même vitesse, mais en sens contraire; lors donc que le corps A est arrivé à un point *g* du plan, ce point se trouve à la place que le corps occupoit quand il a commencé de se mouvoir, & les points A & *g* n'en sont plus qu'un. Cela posé, il est facile de démontrer que le corps A décrit la diagonale AD. Le plan ne peut être emporté avec la vitesse *gc*, & la coulisse avec la vitesse *go*, que le point *g* du plan ne décrive la diagonale *ga* (la preuve est la même que celle que nous avons donnée (*Liv. I. art.* 65): or cette diagonale est égale & parallele à AD, ce qui est évident, puisque les côtés des deux parallelogrammes sont égaux & paralleles, de plus les points A & *g* de ces deux diagonales ne different point, comme on vient de voir; donc ces deux diagonales paralleles sont sur une même ligne droite DA *ga* avec la ligne A*g*: mais le point *g* du plan décrit la diagonale *ga* dans le tems que par les vitesses qu'il a suivant les côtés il parcourroit *gc* & *go*, donc le corps A qui est mû sur A*g* ou AD avec la même vitesse que le point *g* sur *ga* décrira aussi la diagonale AD dans le même tems, c'est-à-dire, dans le tems qu'avec les vitesses suivant AC & AB, il auroit décrit ces mêmes côtés.

3. *Corollaire.* Si un corps parcourt ou tend à parcourir une ligne droite avec une vitesse quelconque, on peut la regarder comme composée de deux vitesses représentées

par les côtés d'un parallelogramme, dont la diagonale représente la vitesse supposée, si les côtés du parallelogramme font un angle infiniment petit, la vitesse supposée sera égale à la somme des vitesses suivant les côtés; car pour lors la diagonale est égale à la somme des côtés.

4. L'Auteur prouve ensuite le rapport de deux puissances en équilibre sur un levier, sans être obligé de passer par la supposition ordinaire que les directions des puissances concourent; supposition qui est peu naturelle, & que l'on a bien de la peine à concevoir dans le cas où elles sont paralleles. Voici comment on y parvient par la décomposition des puissances.

Soient AH & BE [*Fig.* 18] les directions de deux puissances en équilibre sur le levier angulaire ou courbé ACB, & que AH & BE soient entr'elles comme ces deux puissances; je décompose la puissance AH en deux autres, dont les directions AK & AG prolongées passent, l'une par B, l'autre par C; & de même la puissance BE en deux autres dont les directions BP & BF passent par A & par C, en menant les perpendiculaires CM, CV, CL sur AH, BE, AB; CO, CS paralleles aux directions AH, BE, & ICN parallele à AB. *Il faut prouver que dans l'équilibre les puissances appliquées en* A, B *&* *représentées par* AH *&* BE, *sont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires* CM, CV *menées de l'appui* C *aux directions* AH, BE *prolongées en* M, V.

1°. Les triangles semblables AHK, CAO donnent CO. AO : : AH. AK; & parce que CI=AO, à cause du parallelog. OI, & que d'ailleurs les triangles rectangles OCL, ICM sont semblables, les angles O, I étant égaux à l'angle A du parallelogramme, nous aurons CO. AO ou CI : : CL. CM; donc CL. CM : : AH. AK; donc $AK=\frac{CM\times AH}{CL}$. 2°. Les triangles semblables EBP, CSB donnent CS. SB ou CN : : BE. BP; & parce que les triangles rectangles CLS, CVS sont semblables CS. CN : :

CL. CV; donc CL. CV : : BE. BP. Donc $BP = \frac{CV \times BE}{CL}$: mais parce que les puissances AH, BE sont supposées en équilibre, il est nécessaire que les puissances décomposantes ou dérivées des puissances AH & BE soient aussi en équilibre : or cela ne peut être que les puissances AK & BP, qui sont directement opposées, ne soient égales, autrement l'une surmonteroit l'autre, & il n'y auroit point équilibre; donc AK = BP; donc $\frac{CM \times AH}{CL} = \frac{CV \times BE}{CL}$, si on multiplie ces deux grandeurs égales par CL, ce qui se fait en ôtant ce dénominateur CL, nous aurons $CM \times AH = CV \times BE$. Donc AH. BE : : CV. CM, c'est-à-dire, que les puissances AH, BE, supposées en équilibre, sont entre elles réciproquement comme les perpendiculaites CV, CM menées de l'appui C aux directions.

5. Cette démonstration suppose que les lignes AC & CB fassent un angle, & il semble par conséquent qu'elle ne puisse s'appliquer au cas où le levier est droit, & les directions des puissances paralleles. Cependant comme la proposition est vraie, quelque obtus que soient l'angle ACB, il est clair qu'elle doit être vraie encore lorsque l'angle ACB est de 180 degrés. Voici au reste une démonstration particuliere pour le cas dont il s'agit.

6. Soient AP, AR [*Fig.* 19] les bras de levier; PD, RS les directions des deux puissances que je suppose en équilibre; il est évident en premier lieu que si les bras de levier sont égaux, les puissances P, R doivent être égales. Mais si les bras AP, AR sont inégaux, alors ayant tiré à volonté la ligne AS, imaginons que cette ligne est inflexible à l'extrémité S de laquelle soient appliquées deux puissances égales & opposées dans la même ligne que la puissance R : supposons de plus que celle des deux puissances S qui tire en en-bas fasse équilibre avec P, celle qui tire vers le haut fera équilibre avec R, car R & S, ou son égale, qui tire en en-bas, font l'une & l'autre équilibre avec P; d'ailleurs elles tirent sur la même ligne RS; donc S qui tire en-haut,

& R, doivent se faire équilibre, & être égales. Cela posé, la puissance S & la puissance P étant en équilibre sur le levier courbé PAS, sont, selon l'article précédent dans la raison réciproque des perpendiculaires AR, AP & S. P :: AP. AR; donc puisque R=S. R. P :: AP. AR, c'est-à-dire que ces puissances dans l'équilibre sont dans la raison réciproque des perpendiculaires menées de l'appui aux directions.

10. *Pour la page 210, après l'article 94.*

PROBLÊME

Dilater l'air dans un rapport donné avec la Machine pneumatique. On propose, par exemple, de dilater l'air du récipient 81 fois davantage que dans son état naturel.

On suppose que la grandeur du récipient est à celle du corps de pompe comme 1 à 2; il est visible qu'il s'agit de trouver le nombre de fois qu'il faut vuider le corps de pompe pour donner à l'air le degré de dilatation proposé. Les capacités du récipient & du corps de pompe prises ensemble étant 3, & celle du récipient 1, si l'on éleve ces deux nombres au degré de puissance marqué par le nombre de fois qu'il faut vuider le corps de pompe, lequel est inconnu, & que l'on peut exprimer par x, l'on aura la proportion : 3^x. 1^x :: 81. 1 (*Liv. V.* 93): de sorte qu'il s'agit de trouver le degré x de puissance auquel il faut élever les capacités 3 & 1 pour que l'air du récipient soit 81 fois plus dilaté que l'air naturel. Pour trouver ce nombre, il faut opérer par les logarithmes. On sçait que quatre nombres étant en proportion géométrique, leurs logarithmes sont en proportion arithmétique. Ainsi les logarithmes des 4 nombres 3^x. 1^x. 81 & 1 sont en progression arithmétique, le logarithme de 1 & de ses puissances est 0, celui de 81 est 19084850, le logarithme de 3 est 4771213: or pour avoir le logarithme de 3 élevé à la puissance x, il faut multiplier son logarithme par x, comme l'on sçait: nous aurons donc la proport. arithmétiq. $4771213x$. 0 :: 19084850. 0; la somme des extrêmes étant égale à la somme des moyens

$4771213x = 19084850$; donc $x = \frac{19084850}{4661213} = 4$; de ſorte que pour avoir le rapport de l'air dilaté à l'air primitif, il faut élever les capacités 3 & 1 à la quatriéme puiſſance : or le même nombre 4 exprime auſſi le nombre de fois qu'il faut vuider le corps de pompe (*Liv. V.* 93); donc ſi on le vuide 4 fois, l'air qui reſtera dans le récipient ſera 81 fois plus dilaté que l'air primitif. En effet après la premiere opération, il ne reſtera dans le récipient que la troiſiéme partie de l'air primitif, puiſque le corps de pompe eſt 2 fois plus grand; après la ſeconde, il ne reſtera que le tiers du reſte précédent ou la neuviéme partie de l'air primitif; après la troiſiéme, il ne reſtera que la vingt-ſeptiéme partie; enfin après la quatriéme il ne reſtera que la 81e. partie de l'air primitif.

Voici la méthode du Problême appliquée à un exemple de choſe plus ſenſible que l'air. On a un tonneau ordinaire contenant 144 pintes de vin, on en tire d'abord une par la fontaine, qu'on remplace d'une autre d'eau par le bondon; & ſuppoſant que l'eau ſe mêle parfaitement avec le vin, on en tire une ſeconde de ce mélange que l'on remplace par une autre pinte d'eau; on tire une troiſiéme pinte du tonneau, & l'on la remplace par une troiſiéme pinte d'eau; *continuant de même, on demande combien il faudra mettre de pintes d'eau dans le tonneau pour qu'il y en ait autant qu'il y en reſte de vin.*

Pour réſoudre le Problême, nous ne ferons point attention au mélange; mais nous conſidérerons le vin comme ſe rarefiant de lui-même, & occupant toujours la capacité du tonneau à meſure qu'on en tire par la fontaine, ainſi que feroit un fluide élaſtique : car il eſt viſible que l'eau qu'on verſe dans le tonneau dilate le vin, & lui conſerve toujours le même volume quoiqu'on en diminue la quantité, & produit de cette ſorte le même effet que le reſſort. Cela poſé, nous regarderons le tonneau comme un récipient, & le vaiſſeau qui tient une pinte comme un corps de pompe qui ſe remplit toutes les fois qu'on tourne le robinet de la fontaine : il s'agit donc de trouver le nombre de fois qu'il fau-

droit le vuider pour que le vin fût deux-fois plus dilaté s'il étoit élastique. Selon la méthode il faut faire une somme des capacités du tonneau & de la pinte, qui sera égale à 145 pintes, élever cette somme, & la capacité du tonneau égale à 144 pintes, au degré de puissance marqué par le nombre de pintes qu'il faut tirer du tonneau : ce nombre étant inconnu, il faut le nommer x, & les nombres 145, 144 élevés à la puissance x seront 145^x 144^x : or comme ce premier nombre au second, ainsi la quantité de vin dans son état naturel & primitif est à la quantité de vin lorsqu'il est deux fois plus rarefié ; il est évident que ces deux quantités sont entr'elles comme 2 & 1 : nous aurons donc $145^x . 144^x :: 2 . 1$; ces quatre grandeurs étant en proportion géométrique, leurs logarithmes sont en proport. arithmétique. Les logarith. de 145 & de 144 sont 21613680. 21583625 ; les logarithmes de 2 & de 1 sont 3010300 & 0 : or si on multiplie les deux premiers par le nombre x, l'on aura les logarithmes des puissances 145^x & 144^x ; la proportion arithmétiq. des quatre log. est donc celle-ci, $21613680x$: $21583625x$: $3010300 . 0$: la somme des extrêmes étant égale à la somme des moyens, $21613680x = 21583625x + 3010300$ retranchant de part & d'autre des grandeurs égales, $30055x = 3010300$; donc $x = \frac{3010300}{30055} = 100 \frac{4800}{30055}$. Ce quotient est le degré de puissance auquel il faut élever les nombres 145 & 144 pour avoir le rapport de la densité du vin dans son état naturel à celle qu'il a lorsqu'il est 2 fois plus rarefié ; mais ce nombre marque aussi combien de fois il faut vuider la pinte ; donc si on tire 100 pintes en faisant le mélange supposé, la liqueur dont le tonneau demeurera rempli sera moitié vin & moitié eau. Si le tonneau contenoit cent pintes, on trouveroit par les mêmes opérations qu'il faudroit en tirer un peu plus de 69, M. Belidor, qui se propose le problême dans son *Architecture Hydraulique*, en raisonnant un peu autrement, trouve 68. Si on vouloit tremper le vin dans un autre rapport que celui de 2 à 1 en suivant la même maniere de le mêler avec l'eau, on trouveroit avec une égale facilité le nombre de pintes qu'il faudroit tirer en faisant ce mélange.

PROPOSITIONS D'ARITHMETIQUE citées dans cet Abrégé.

POUR *en faciliter davantage l'intelligence, on les a accompagnées d'explications en nombres : si on en veut avoir des démonstrations exactes, on peut consulter les Livres d'Arithmétique qui en traitent : pour la commodité de ceux qui ont les* ELÉMENS DE GÉOMÉTRIE, D'ARITMÉTIQUE, ET D'ALGEBRE *de M. Rivard, on a mis à la fin de chaque Proposition, l'endroit de cet Ouvrage où elle se trouve expliquée & démontrée. Le nombre qui est au commencement de chaque Proposition est celui qui est cité dans cet Abrégé : ainsi si on trouve* (24. Arith.), *il faudra chercher la Proposition qui dans cette Table est précédée du nombre* 24; *& si à la fin de cette même Proposition on trouve* (des Proport. Liv. II. 86), *cela signifie qu'on la trouvera expliquée dans les* Elémens, *article 86 du second Livre, qui traite des Proportions. On observe la même chose pour les Propositions de Géométrie qui sont citées après celles d'Arithmétique. On s'est servi de la troisiéme édition chez Desaint & Saillant.*

1. Un rapport Géométrique ne differe pas d'une division indiquée : ainsi le rapport de 30 à 5 peut être considéré comme une division qu'on propose de faire en cherchant combien de fois 5 est dans 30, & le quotient 6 fait connoître quel est ce rapport (*Liv. II. des Raisons*, 25).

2. Par la division on partage le dividende en autant de parties égales qu'il y a d'unités au diviseur, & le quotient est une de ces parties égales : ainsi si on propose de diviser 30 en 5 parties égales, ce qu'on fait en disant 5 en 30, il y est 6 fois, le quotient 6 est la cinquiéme partie du dividende 30 (*Arith. Liv. I.* 85).

3. Deux grandeurs sont entr'elles réciproquement comme deux autres, lorsque pour avoir la Proportion dont il s'agit, il faut changer l'ordre des deux premieres ou des deux dernieres, ou le renverser : ainsi si on divise

un même nombre, par exemple 40, par deux diviseurs différens, comme 8 & 4, on dit que les quotiens 5 & 10 sont entr'eux réciproquement, comme les diviseurs 8 & 4; ce qui signifie qu'on ne peut avoir la proportion dont il s'agit, qu'en changeant l'ordre des diviseurs ou des quotiens en cette maniere, 8. 4 :: 10. 5, ou 4. 8 :: 5. 10 (*des Proport. Liv. II.* 50). Nous ajouterons par maniere de Corollaires, que si deux rapports ont un même antécédent, ils sont entr'eux réciproquement comme les conséquens, puisqu'un rapport n'est qu'une division indiquée : mais si deux rapports ont le même conséquent, ils sont entr'eux comme les antécédens; car lorsqu'on divise deux grandeurs par un même diviseur, les quotiens sont comme les dividendes : ainsi si on divise 40 & 20 par 5, les quotiens 8 & 4 sont dans la raison des dividendes 40 & 20 (*des Proport.* 19).

4. Lorsqu'on multiplie les antécédens 10 & 12, & les conséquens 5 & 3 de deux rapports $\frac{10}{5}=2$ & $\frac{12}{3}=4$, le nouveau rapport que l'on trouve en comparant le premier produit 120 au second 15 en cette maniere $\frac{120}{15}$ est dit composé de la raison de 10 à 5, & de celle de 12 à 3, & cela parce que le quotient 8 que ce dernier rapport donne, est le produit de 2 & de 4, valeurs des deux précédens. En général si on a deux ou plusieurs rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ & qu'on multiplie les antécéd. & les conséq. la raison $\frac{ac}{bd}$ des produits est composée de la raison de a à b, & de celle de c à d : lors donc que l'on a deux produits tels que ac, bd, & qu'on compare l'un à l'autre, il faut dire qu'ils sont en raison composée de leurs racines, ou que leur rapport est composé de celle des racines $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Mais si on a les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, qu'on multiplie l'antécédent a du premier par le conséquent d du second, & le conséquent b du premier par l'antécédent c du second, les produits $\frac{ad}{bc}$ sont en raison composée de la raison directe de a à b & de la raison inverse de c à d. Car le rapport $\frac{d}{c}$ est inverse de $\frac{c}{d}$: or $\frac{ad}{bc}$ est composé de deux rapports $\frac{a}{b}$ & $\frac{d}{c}$. Donc il est composé du rapport direct $\frac{a}{b}$, & de l'inverse $\frac{c}{d}$ (*des Proport. Liv. II.* 89. 92).

5ᵉ. Lorſque deux rapports ſont égaux & que l'antécédent de l'un eſt égal à ſon conſéquent; l'antécédent de l'autre rapport eſt auſſi égal à ſon conſéquent; de même ſi les antécédens ſont égaux, les conſéquens ſont pareillement égaux; & ſi les conſéqu. ſont égaux, les antécédens ſont auſſi égaux, autrement il n'y auroit point de proportion (*des Proport. Liv. II.* 38).

6ᵉ. Le quotient étant multiplié par le diviſeur donne pour produit le dividende (*Arith. Liv. I.* 72).

7ᵉ. Lorſqu'on a un produit qui réſulte de deux quantités multipliées l'une par l'autre, ſi l'on diviſe ce produit par l'une d'elles, l'autre grandeur eſt le quotient: ainſi ſi on diviſe par a le produit ab des deux grandeurs a, b, le quotient eſt la ſeconde grandeur b (*Arith. Liv. I.* 84).

8ᵉ. Si on multiplie deux termes d'un rapport, ou les deux antécédens, ou les deux conſéquens d'une proportion par un même multiplicateur: pareillement ſi on les diviſe par un même diviſeur, les produits ſont dans la raiſon des grandeurs multipliées, & les quotiens dans la raiſon des grandeurs diviſées. Si l'on multiplie les nombres 8 & 6 par un même multiplicateur 5, les produits 40 & 30 ſont dans la raiſon des grandeurs multipliées 8 & 6; pareillement ſi on diviſe les grandeurs 40 & 30 par le diviſeur commun 5, les quotiens 8 & 6 ſont dans la raiſon des grandeurs diviſées 40 & 30; & ſi on a la proportion 40. 8 :: 30. 6, les antécédens étant diviſés ou multipliés par une même grandeur, les produits & les quotiens ſont dans la raiſon des grandeurs diviſées ou multipliées, & la proportion n'eſt point détruite. De même ſi après avoir multiplié ou diviſé deux grandeurs on trouve deux produits qui ſoient dans la raiſon des multiplicandes, ou deux quotiens qui ſoient dans la raiſon des dividendes, il faut que le multiplicateur ou le diviſeur des deux grandeurs ſoit le même (*des Raiſons, Liv. II.* 18, 19).

9ᵉ. Lorſque quatre grandeurs ſont en proportion, la ſomme ou la différence du premier antécédent & de ſon conſéquent, eſt à l'antécédent ou au conſéquent, comme

la ſomme ou la différence du ſecond antécédent & de ſon conſéquent eſt à l'antécédent ou au conſéquent ; ainſi ſi l'on a 12. 4 :: 15. 5, on aura 4 proportions, en comparant les ſommes 16 & 20 de chaque antécédent à ſon conſéquent, aux antécédens 12 & 15, ou aux conſéquens 4 & 5 ; ou bien en comparant les différences 8 & 10, ou aux antécédens, ou aux conſéquens, ainſi 16. 4 :: 20. 5 : 16. 12 :: 20. 15 : 8. 4 :: 10. 5 : 8. 12 :: 10. 15 (*des Proport. Liv. II. 60, 61 & ſuiv.*)

10ᵉ. Les trois premiers termes d'une proportion étant connus, on trouve le quatriéme en multipliant les deux moyens & en diviſant le produit par le premier extrême : ſoient les trois nombres 8. 4 :: 6. x, pour trouver le quatriéme terme x de la proportion, il faut multiplier 4 par 6, & diviſer le produit 24 par 8, & le quotient 3 eſt le nombre cherché (*des Proport. Liv. II.* 72).

11ᵉ. Lorſque le produit de deux grandeurs eſt égal au produit des deux autres, on peut toujours diſpoſer les racines ou les produiſans en proportion : ainſi ſi $4\times6=8\times3$ les racines 4, 6, 8, 3 peuvent être miſes en proportion, pourvu que les racines d'un produit ſoient les extrêmes, & les racines de l'autre produit les moyens, en cette maniere 4. 3 :: 8. 6, ou 4. 8 :: 3. 6, &c. (*des proport. liv.* II, 43).

12ᵉ. Dans une proportion géomet. le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens : ainſi dans la proportion 8. 4 :: 6. 3 ; $8\times3=4\times6$. (*des proport. liv.* II. 40).

13ᵉ. Deux raiſons ou deux fractions ſont entr'elles comme le produit des extrêmes eſt au produit des moyens : d'où il ſuit que ſi elles ſont égales, ces produits ſont égaux : ainſi les rapports $\frac{12}{3}$, $\frac{20}{4}$ ſont entr'eux comme les produits 36 & 60 des extrêmes & des moyens, en ſorte que $\frac{12}{3}$. $\frac{20}{4}$ :: 48. 60. Car $\frac{12}{3}=4$ & $\frac{20}{4}=5$: or 4. 5 :: 48. 60, puiſque le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens. (*Liv.* II. 29, 44, 138.)

14ᵉ. Deux rapports égaux à un troſiéme ſont égaux entre eux, & l'on peut toujours ſubſtituer un rapport à la place

d'un autre qui lui eſt égal : car dans un rapport on conſidére ſeulement la maniere dont l'antécédent contient le conſéquent : or cette maniere eſt la même pour tous les rapports égaux ; donc, &c. (*des Proport. liv.* II. 25).

15ᵉ. Si on multiplie ou ſi on diviſe deux grandeurs égales par une même ou par deux autres grandeurs égales, les produits ſont égaux, de même que les quotiens. (C'eſt un axiome ou propoſition évidente par elle-même).

16ᵉ. Dans une ſuite de raiſons égales, & dans une progreſſion géom. la ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens, comme un antécédent eſt à ſon conſéquent. Soient les raiſons égales $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}$, la ſomme des antécédens $3+4+5=12$ eſt à la ſomme des conſéquens $6+8+10=24$, comme 3 eſt à 6, ou comme 4 eſt à 8. (*des Proport.* 83, 84.)

17ᵉ. Lorſqu'on diviſe les antécédens d'une proportion géométrique, par un même diviſeur, ou qu'on les multiplie par un même multiplicateur ; qu'on fait la même opération pour les conſéquens (il n'eſt pas néceſſaire que le multiplicateur ou le diviſeur des deux antécédens ſoit le même que celui des deux conſéquens) les quotiens & les produits ſont encore en proportion. (*Voyez la Propoſition* 8ᵉ.)

18ᵉ, 19, 20. Si on multiplie les deux termes d'un rapport par deux multiplicateurs différens, le rapport devient plus grand ou moindre ; plus grand, ſi après la multiplication l'antécédent contient davantage ſon conſéquent ; moindre, s'il le contient moins de fois. Si après la multiplication l'antécédent contient ſon conſéquent 2, 3 fois davantage, le rapport eſt devenu par-là deux, trois fois plus grand, il faut pour lors que le multiplicateur de l'antécédent ſoit deux, trois fois plus grand que celui du conſéquent ; en un mot le rapport augmente ou diminue dans la raiſon des deux multiplicateurs. Si les deux multiplicateurs ſont 2 & 3, le nouveau rapport eſt moindre, & il n'eſt plus que les deux tiers du rapport ſuppoſé, ſi les multiplicateurs ſont 4 & 7, le nouveau rapport n'eſt que les quatre ſeptiémes du rapport ſuppoſé, &c. (*L. II.* 15, 16).

21ᵉ. Si on multiplie les termes d'une proportion par ceux d'une autre dans le même ordre, les antécédens par les antécédens, & les conſéquens par les conſéquens, les produits ſont encore en proportion. Soient les deux proportions 8 . 4 :: 6 . 3 : 5 . 15 :: 7 . 21, les produits dont il s'agit ſont 40. 60 :: 42. 63 : or ces quatre produits ſont en proportion ; car comme 40 eſt les deux tiers de 60, 42 eſt les deux tiers de 63 (*Liv. II.* 85).

22. Dans une progreſſion arithmétique, la différence de chaque antécédent à ſon conſéquent eſt la même : ainſi dans la progreſſion arithmétique 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c. la différence de chaque terme au ſuivant eſt 2.

23ᵉ. Si on diviſe deux grandeurs égales par deux diviſeurs différens, les quotiens ſont dans la raiſon inverſe ou réciproque des diviſeurs. Voyez la troiſiéme, elle n'en différe point.

24ᵉ. Si quatre grandeurs ſont en proportion géométriq. leurs quarrés ſont auſſi en proportion ; & ſi les quarrés de 4 grandeurs ſont en proportion leurs racines ſont auſſi en proport. Soit la proport. 8. 4 :: 6. 3, il eſt évident que les quarrés 64. 16 :: 36. 9. ſont en proport. & parce que ces quatre quarrés ſont en proport. leurs racines 8, 4, 6, 3, ſont auſſi en proportion. (*Liv. II*, 86.)

25. Dans une progreſſion arithmétique la ſomme de deux termes également éloignés du terme moyen, eſt égale à la ſomme des deux autres termes auſſi également éloignés du même terme moyen, & le terme moyen eſt la moitié de chacune de ces ſommes. Soit la progreſſion arithmétique 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c. la ſomme de 3 & 11, c'eſt-à-dire, 14 eſt égale à la ſomme de 1 & de 13 : or ces nombres deux à deux ſont également éloignés du terme moyen 7 ; & ce terme 7 eſt la moitié de chacune de ces ſommes : ce qui eſt évident : d'où il ſuit que pour avoir la ſomme d'une progreſſion arithmétique, il faut multiplier le double du terme moyen, ou la ſomme des deux termes qui en ſont également éloignés par la moitié du nombre des termes : ainſi pour avoir la ſomme de la progreſſion précédente, il faut multi-

plier le double du terme moyen 7 ou bien la somme des extrêmes 1+13, par la moitié du nombre des termes, c'est-à-dire, par $\frac{7}{2}$, & l'on aura $\frac{98}{2}$=49.

26. Dans une proportion continue le quarré du premier terme est au quarré du second, comme le premier est au troisiéme. Soit la proportion continue 12. 6 :: 6. 3. 144 & 36 qui sont les quarrés des deux premiers termes 12 & 6 sont entr'eux comme 12 & 3 qui sont le premier & le troisiéme terme de la proportion. (*Liv. II.* 113).

27. Pour réduire un nombre entier en fraction, sans qu'il change de valeur, il faut le multiplier par le dénominateur donné. Pour réduire 4 en fraction qui ait pour dénominateur 3, il faut le multiplier par 3, & $\frac{12}{3}$ est la fraction demandée; car $\frac{12}{3}$=4. (*Liv. II.* 153.)

28. Deux grandeurs qui ont même raison à une troisiéme, c'est-à-dire, qui contiennent également cette troisiéme, sont égales. (*Liv.* II. 14.)

29. Dans une proportion continue dont on connoît les deux extrêmes, on aura le terme moyen en tirant la racine quarrée du produit des deux extrêmes : ainsi si l'on a 8. x :: x. 2, on aura $8 \times 2 = xx = 16$, & tirant la racine de xx & de 16, l'on aura $x=4$: car 4 est moyen proportionnel entre 8 & 2, & mettant 4 au lieu de x, 8. 4 :: 4. 2.

PROPOSITIONS DE GEOMÉTRIE *Élémentaire qui sont citées dans cet Abrégé.*

1. Un rectangle tel que AB est égal au produit de sa hauteur AD par sa base AC [*Fig.* 1. *pla.* 7]; si la base AC contient 4 pieds & la hauteur AD, 3, le rectang. contiendra 12 pieds quarrés : or 12 est le produit de 3 par 4. (*Géom. Liv.* II. 137).

2. Deux lignes droites paralleles AD, BC [*Fig.* 2], qui sont comprises entre deux autres paralleles AC, DB sont égales, ou ce qui est la même chose, les côtés opposés AD, BC d'un parallelogramme AB sont égaux; & les an-

-gles opposés A & B, ou D & C dans ce même parallelog. sont égaux. (*Liv.* I. 97, *liv.* II. 43.)

3. La perpendiculaire DE [*Fig.* 2] est la plus courte que l'on puisse mener du point D sur la ligne AC. (*Géom. liv.* I. 73, 74).

4[e]. Si deux lignes DB, AC [*Fig.* 2] sont paralleles, & qu'une troisiéme telle que DE soit perpendiculaire à l'une d'elles AC, elle est aussi perpendiculaire à l'autre DB. (*Liv.* I. 92).

5[e]. Dans un triangle l'angle extérieur ACD [*Fig.* 3] est égal aux deux intérieurs opposés A & B. Car si on fait EC parallele à AB, l'angle ECD est égal à l'angle B, & l'angle ECA est égal à l'angle A. D'où il suit que les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droits; car les deux angles BCA, ACD valent deux droits : or ces deux angles pris ensemble sont égaux aux trois angles du triangle ABC aussi pris ensemble. (*Liv.* II. 16, 17.)

6[e]. Si du sommet d'un triangle isoscele ABC [*Fig.* 3]; c'est-à-dire, qui a deux côtés égaux, on abbaisse la perpendiculaire AF, l'angle A & la base BC sont divisés en deux parties égales, & parce que les côtés AB, AC sont égaux, les angles BCA & l'angle B qui leur sont opposés sont aussi égaux. (*Liv.* II. 22, 24.)

7[e]. Si deux lignes AB, BC comprises dans un espace parallele DB, AC [*Fig.* 4] sont coupées par une troisiéme parallele GE les parties BG, GA de l'une sont proportionnelles aux parties BE, EC de l'autre, en sorte que BG. GA : : BE. EC, si BG est double de GA, BE est double de EC. L'on a aussi AB. AG : : BC. EC; & AB. BG : : BC. BE. (*Liv.* I. 147.)

D'où l'on voit que si dans un triangle ABC on mene une parallele GE à la base AC, les côtés sont divisés en parties proportionnelles, & les côtés sur ces bases sont aussi proportionnels aux bases, en sorte que BG. GE :: BA. AC & BE. EG : : BC. AC. (*Liv. I.* 147, 151, 153).

8[e]. Deux triangles ABC, *abc* [*Fig.* 4. 5] sont semblables, 1°. lorsque les angles de l'un sont égaux aux angles

de l'autre. 2°. Lorsque les côtés AB, BC de l'un étant proportionnels aux côtés homologues *ab*, *bc* de l'autre, les angles B, *b* compris entre ces côtés sont égaux. 3°. Lorsque les côtés AB, BC étant proportionnels aux côtés homologues *ab*, *bc* & les angles C, *c* opposés aux côtés AB, *ab* étant égaux, les deux autres angles opposés A, *a* sont ou tous deux obtus ou tous deux aigus. 4°. Lorsque les trois côtés de l'un sont proportionnels aux trois côtés de l'autre. D'où l'on voit que si l'on a deux triangles semblables ABC, *abc*, dans l'un desquels on connoisse les trois côtés & dans l'autre un côté, on pourra trouver les deux autres par deux Proportions. Car si, par exemple, le côté *ab* est la milliéme partie du côté AB, on voit bien que *bc* est la milliéme partie du côté BC, & le côté *ac* la milliéme partie du côté AC. (*Liv. II.* 53, 55, 56, 59.)

9. Si dans un triangle rectangle ADE [*Fig.* 2.] on connoît deux côtés, on peut trouver le troisiéme par la propriété de ce triangle suivant laquelle le quarré de l'hypothénuse AD est égal aux quarrés pris ensemble des deux autres côtés AE, DE. Supposons que les côtés l'un AE =3, & DE=4, leurs quarrés sont 9 & 16, & leur somme 25 dont la racine quarrée 5 est l'hypothénuse AD. Si l'hypothénuse AD=5 & le côté AE3, leurs quarrés sont 25 & 9 pour avoir le côté DE, je retranche 9 de 25, je tire la racine quarrée du reste 16, & je trouve que le côté DE est exprimé par 4, l'hypothénuse & le côté AE étant 5 & 3 : je fais une opération semblable pour le côté AE, lorsque l'hypothénuse AD & le côté DE sont connus. (*Liv. II.* 183.)

10. 11. 12. Si dans un triangle ABC [*Fig.* 4], on connoît deux côtés & l'angle compris ; ou deux côtés & l'angle opposé à l'un d'eux ; ou tous les angles & un côté, on peut trouver le reste du triangle. (*Trigon.* 42, 46, 48.)

13. Les circonférences des cercles & les arcs semblables sont dans la raison de leurs diametres ou de leurs rayons, & les cercles, c'est-à-dire, leurs aires ou surfaces comme les quarrés des rayons ou des diametres. (*Liv. II.* 89. 90. & 180.)

14. La

14. La tangente AD [*Fig. 6.*] eſt perpendiculaire au rayon CA qui paſſe par le point de contingence A, & elle eſt le prolongement d'un des petits côtés de la circonférence. (*Liv. I.* 113.)

16. Si d'un point D hors du cercle [*Fig.* 6.] on mene une tangente AD & une ſecante DE qui rencontre la circonférence aux points B, E, la tangente AD eſt moyenne proportionnelle entre la ſecante DE & ſa partie DB qui eſt hors du cercle. (*Liv. I.* 167.)

17. 18. 19. L'angle ACB [*Fig.* 6.] qui a ſon ſommet au centre C a pour meſure l'arc AB compris entre ſes côtés ; mais l'angle inſcrit ABE a ſeulement pour meſure la moitié de l'arc EA compris entre ſes côtés ; & l'angle BAD a pour meſure la moitié de l'arc AB ſoutenu par la corde AB. (*Liv. I.* 42. 124. 129.)

19. Les triangles ſemblables ABC, ADE [*Fig.* 7.] ſont entr'eux comme les quarrés des côtés homologues, nous ſuppoſons que les côtés homologues AB, AD ſont entr'eux comme 5 & 3 : or il eſt viſible que le triangle ABC contient 25 petits triangles égaux au triangle AFG, & que le triangle ADE en contient 9 ; donc, &c. (*Liv. II.* 178.)

20. 22. Si deux triangles ABF, ACF ont un côté égal ou un même côté AF [*Fig.* 3.], & les angles BAF, AFB ſur ce côté égaux aux angles FAC, CFA, ils ſont égaux en tout. (*Liv. II.* 27. 29.)

21. Le ſinus d'un angle ACB [*Fig.* 6.] ou d'un arc AB qui meſure cet angle, eſt la ligne AG menée de l'extrémité A de l'arc AB perpendiculairement ſur le rayon CB ou CE qui paſſe par l'autre extrémité du même arc. D'où il ſuit 1°. que l'angle ACB & ſon ſupplément ACE ont le même ſinus AG. 2°. Que le ſinus de l'angle droit ou de l'arc de 90 deg. eſt égal au rayon. 3°. Que dans un triangle les côtés ſont entr'eux comme les ſinus des angles auxquels ils ſont oppoſés. 4°. Si dans le triangle rectangle ACG on conſidere l'hypothénuſe AC comme le rayon d'un cercle ou comme ſinus total, les côtés AG, GC

de l'angle droit sont les sinus des angles qui leur sont opposés. (*Trigon.* 4.)

23. Si deux triangles ont deux côtés égaux & les angles compris entre ces côtés égaux, inégaux, le plus grand angle est opposé à la plus grande base. (*Liv. II.* 34.)

24. Les polygones réguliers semblables ont leurs périmetres comme les rayons droits & obliques ou encore comme les côtés homologues; il faut raisonner des polygones semblables ou de leurs périmetres par rapport aux rayons droits & obliques comme des circonférences par rapport aux rayons. (*Liv. II.* 86.)

25. Si dans un triangle ABC [*Fig.* 7.] on mene plusieurs paralleles à la base BC toutes également distantes entr'elles, elles augmentent également du sommet vers la base, & font une progression Arithmétique ; car les différences prises de suite sont égales, ce qui est évident par l'ispection de la figure.

27. 29. Si deux lignes AC, DB [Fig. 2.] sont paralleles 1°. les angles GCI, GBF intérieur & extérieur du même côté sont égaux : 2°. les angles alternes DBC, BCI sont égaux : & les deux angles intérieurs du même côté CBF, BCI pris ensemble valent deux droits. (*Liv. I.* 90. 91.)

28. Si deux lignes droites EF, IG [*Fig.* 9.] sont perpendiculaires à une troisiéme FG, elles sont paralleles. (*Liv. I.* 96.)

30. Si une ligne droite BC [*Fig.* 2.] tombe sur une autre EI au point C, elle forme deux angles BCI, BCE qui pris ensemble valent deux angles droits. (*Liv. I.* 54.)

31. 32. Dans un polygone régulier 1°. l'angle BAD à la circonférence [*Fig.* 8.], & l'angle au centre C pris ensemble valent deux droits, 2°. les rayons obliques AC, BC sont égaux. (*Liv. II.* 74. 104.)

33. L'angle inscrit EAB dans le demi cercle BAE [*Fig.* 6.] est droit. (*Liv. I.* 127.)

34. Un triangle est égal à la moitié du produit de sa base & de sa hauteur, car il est la moitié d'un rectangle ou d'un parallelogramme de même base & de même hauteur : or ce

rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur ; donc le triangle est seulement égal à la moitié de ce produit. (*Liv. II.* 140.)

35. Deux parallelog. égaux ADBC, EFGI [*Fig.* 1. 9.] ont leurs bases réciproquement proportionnelles aux hauteurs, car ils sont égaux aux produits des bases par les hauteurs, donc EF×FG=AD×AC ; donc AC . FG :: EF . AD. Or si les bases AC, FG étoient comme les hauteurs AD, EF, l'on auroit AC . FG :: AD . EF ; mais puisque la premiere proportion a lieu, il s'ensuit que le rapport de EF à AD est l'inverse de AD à AF ; donc les bases sont en raison inverse des hauteurs. (*Liv. II.* 166.) Il en est de même des triangles égaux, ils ont leurs bases réciproquement proportionnelles aux hauteurs.

36. 40. Deux triangles qui ont même base & même hauteur sont égaux ; si les bases sont égales & les hauteurs inégales, ils sont comme les hauteurs inégales ; si les bases sont inégales & les hauteurs égales, ils sont comme les bases inégales (*Liv. II.* 126.), il en est de même des parallelogrammes.

37. Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rect. ABC [*Fig.* 10.] on abbaisse une perpendiculaire BD sur la base ou hypothénuse AC, elle le divise en deux triangles semblables entr'eux & au grand. (*Liv. II.* 62.)

39. Si des extrémités de la corde AB [*Fig.* 6.] on mene le diametre BCE & la perpendiculaire AG sur le diametre BE, 1°. la corde AB est moyenne proportionnelle entre le diametre BE & la partie BG comprise entre la corde & la perpendiculaire AG. 2°. La perpendiculaire AG est moyenne proportionnelle entrre les deux parties BG, GE du diametre BE. (*Liv. II.* 62.)

41. Si plusieurs triangles rectangles ont une même base ou hypothénuse, ils peuvent être inscrits dans un cercle qui auroit pour diametre cette hypothénuse : la raison en est que l'angle qui s'appuie sur le diametre est droit de quelque point de la circonférence que l'on tire les côtés de l'angle aux extrémités du diametre (*Liv. I.* 127.)

42. 1°. Si deux prismes ou deux cylindres sont entr'eux comme leurs hauteurs, ils ont leurs bases égales. 2°. S'ils ont des bases égales, ils sont comme les hauteurs. 3°. S'ils ont des hauteurs égales, ils sont comme les bases. 4°. S'ils ont des bases & des hauteurs inégales, ils sont comme les produits des bases & des hauteurs. 5°. S'ils sont égaux, les hauteurs sont réciproquement proport. aux bases. (*Liv. III.* 112. *& suiv.*)

TABLE DES PRINCIPALES MATIERES

Contenues dans cet Abregé.

LIVRE PREMIER.

LIVRE SECOND.

LIVRE TROISIEME.

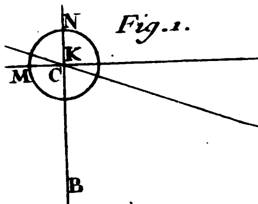
LIVRE QUATRIEME.

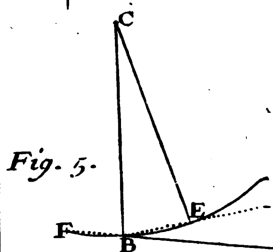
LIVRE CINQUIEME.

LIVRE SIXIEME.

Fin de la Table des Matieres.

Pl. 6.


Fig. 1.
N
K
M
C
B


C
Fig. 5.
E
F
B

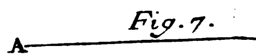
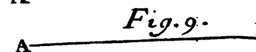
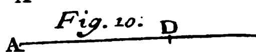
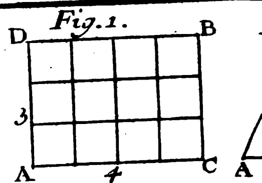
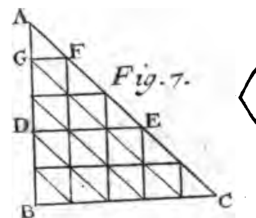

Fig. 7.
A


Fig. 8.
A


Fig. 9.
A


Fig. 10.
D
A


Fig. 1.
D
B
3
A
4
C
A


A
G
F
Fig. 7.
D
E
B
C